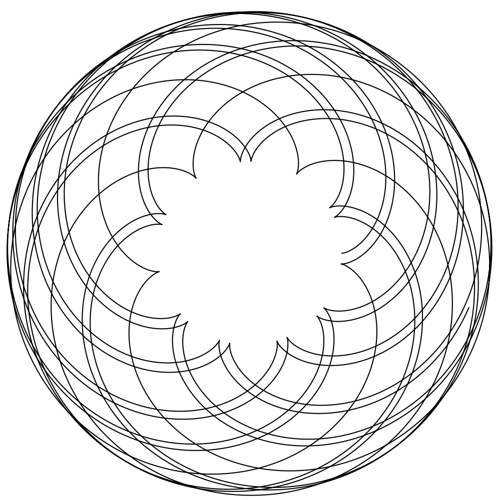
Vzdálenosti



Obsah

1 Vzdálenosti

Podíváme se na to, jak je to s různými vzdálenostmi. K tomu se nám bude hodit znát všechny tři typy součinů vektorů, takže si je pro jistotu zopakujeme. U všech součinů budeme předpokládat, že máme třísložkové vektory tvaru $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Nejjednodušší na výpočet je ***skalární součin***:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3 = |\vec{u}|\, |\vec{v}| \cdot \cos\varphi, \tag{1}$$

kde φ je úhel mezi vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$. Výsledkem skalárního součinu, jak název napovídá, je jedno jediné číslo. Jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ vzájemně kolmé, jejich skalární součin je roven nule.

Jinak je tomu u ***vektorového součinu*** dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$. Výsledek je vektor $\vec{w}$, který je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$ (vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoří pravotočivý systém) a jeho souřadnice jsou dány vztahem:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2\, v_3 - u_3\, v_2,\ u_3\, v_1 - u_1\, v_3,\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1), \tag{2}$$

přičemž velikost $|\vec{w}| = |\vec{u}|\, |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$. K snazšímu zapamatování vzorce (2) slouží jako mnemotechnická pomůcka následující schema, příslušné součiny jsou naznačeny šipkami.

$$\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array}$$

Kombinací obou výše zmíněných součinů je ***smíšený součin*** $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$. Značí se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ a splňuje: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$. S využitím vztahů (1), (2) dostaneme pro smíšený součin:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = u_1\, v_2\, w_3 + u_2\, v_3\, w_1 + u_3\, v_1\, w_2 - (u_3\, v_2\, w_1 + u_1\, v_3\, w_2 + u_2\, v_1\, w_3) \tag{3}$$

K zapamatování máme opět schema, v němž šipky naznačují, jak tvořit správné součiny.

$$\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_1 & w_2 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_1 & w_2 \end{array}$$

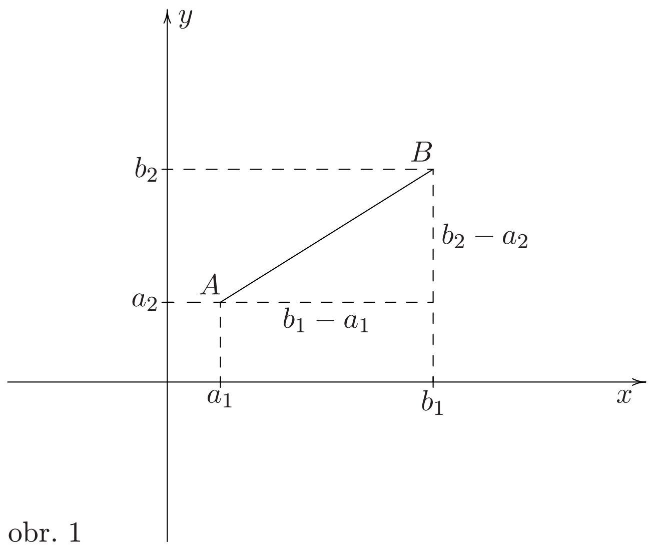
1.1 Vzdálenosti v rovině

Naučíme se určovat vzdálenost dvou bodů, vzdálenost bodu od přímky a vzdálenost dvou rovnoběžek.

1.1.1 Vzdálenost dvou bodů

Vzdálenost dvou bodů A, B značíme $|AB|$ a pro její určení si vystačíme s Pythagorovou větou. Z obrázku 1 je vidět, že vzdálenost bodů A, B je délka přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají velikosti $|b_1 - a_1|$, $|b_2 - a_2|$, a tedy:

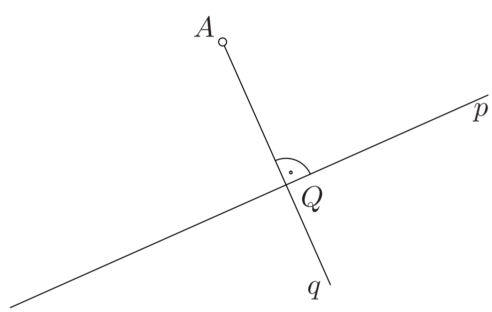
$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \tag{4}$$



obr. 1

1.1.2 Vzdálenost bodu od přímky

Úloha zní: vypočítejte vzdálenost bodu $A[x_0, y_0]$ od přímky p, zadané obecnou rovnicí: $ax + by + c = 0$. Při výpočtu budeme sledovat stejný postup, jako kdybychom úlohu řešili konstruktivně. To jest: nejprve vedeme bodem A přímku q kolmou k přímce p. Nalezneme průsečík Q obou přímek a „změříme" délku úsečky AQ.



obr. 2

Výpočet bude o něco jednodušší, převedeme-li obecnou rovnici přímky p na parametrické rovnice. K tomu potřebujeme znát nějaký bod přímky p a její směrový vektor. Bod přímky je např. $P[0, -c/b]$, ($x = 0$ jsme si zvolili a $y = -c/b$ jsme dopočítali z rovnice přímky). Směrový vektor $\vec{p}$ musí být kolmý k normálovému vektoru $\vec{n} = (a, b)$. To splňuje např. vektor $\vec{p} = (-b, a)$. Potom parametrické rovnice přímky p jsou:

$$x = -b\,t, \qquad y = -\frac{c}{b} + a\,t, \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Podobně přímka q prochází bodem $A[x_0, y_0]$ a má směrový vektor $\vec{q} = \vec{n} = (a, b)$, takže její parametrické rovnice jsou:

$$x = x_0 + a\,s, \qquad y = y_0 + b\,s, \qquad s \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Souřadnice průsečíku Q nalezneme vyřešením soustavy rovnic (5), (6). Vyloučením x a y dostaneme dvě rovnice pro neznámé $t,\ s$. První rovnici vynásobíme a, druhou b a obě rovnice sečteme:

$$\begin{aligned} -b\,t &= x_0 + a\,s \qquad / \cdot a \\ -\frac{c}{b} + a\,t &= y_0 + b\,s \qquad / \cdot b \end{aligned}$$

Po sečtení dostáváme jedinou rovnici pro parametr s:

$$-c = ax_0 + by_0 + (a^2 + b^2)\,s \quad \text{a z toho} \quad s = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Souřadnice bodu Q tedy jsou: $\left[x_0 - a\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2},\ y_0 - b\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right]$.

Nyní máme vše potřebné pro určení vzdálenosti $d(A,p)$ bodu A od přímky p:

$$d(A,p) = |QA| = \sqrt{\left(x_0 - \left(x_0 - a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)\right)^2 + \left(y_0 - \left(y_0 - b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)\right)^2}.$$

Poslední vztah ještě maličko upravíme do jednodušší podoby; x_0 a y_0 se vyruší, zbytek umocníme na druhou, zlomek vytkneme, součet kvadrátů pokrátíme, odmocníme a máme vcelku hezký a pro někoho i zapamatovatelný výsledek:

$$d(A,p) = \frac{|\,ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{7}$$

který dává hledanou vzdálenost bodu $A[x_0, y_0]$ od přímky $p:\ ax + by + c = 0$.

Příklad 1

Určete vzdálenost bodu $A[-1,5]$ od přímky p zadané parametricky: $x = -2 + 4t, \quad y = 1 - 3t$.

Řešení

Z parametrických rovnic přímky p vyloučíme parametr t, abychom dostali obecnou rovnici přímky p. Rovnice vynásobíme 3 a 4

$$\begin{array}{ll} x = -2 + 4t & / \cdot 3 \\ y = 1 - 3t & / \cdot 4 \end{array} \quad \text{a sečteme :} \quad 3x + 4y = -2, \quad \text{tj.} \quad 3x + 4y + 2 = 0.$$

Dosazením do vzorce (7) dostáváme pro vzdálenost bodu $A[-1,5]$ od přímky p

$$d(A,p) = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{19}{5}.$$

1.1.3 Vzdálenost dvou rovnoběžek

Výpočet vzdálenosti dvou rovnoběžek převedeme na předchozí případ, tj. na výpočet vzdálenosti bodu od přímky. Stačí určit jeden bod na jedné z rovnoběžek a vypočítat vzdálenost tohoto bodu od druhé rovnoběžky. Tím zároveň spočítáme vzdálenost rovnoběžek. Vše si ukážeme na konkrétním příkladu.

Příklad 2

Určete vzdálenost rovnoběžek $p,\ q$, jestliže přímky $p,\ q$ jsou zadány následovně:
a) $p:\ x = 1 + 3t,\ y = 4 - t, \quad q:\ x + 3y + 6 = 0$,
b) $p:\ x = -5 + 2t,\ y = 5t, \quad q:\ x = 2 - 2t,\ y = 1 - 5t$,
c) $p:\ 2x + 3y - 1 = 0, \quad q:\ 2x + 3y + 4 = 0$.

Řešení

ad a) Tento způsob zadání přímek je pro výpočet jejich vzdálenosti nejpohodlnější. Jako bod A dobře poslouží bod [1,4] a roli přímky p převezme přímka q, tj. hledáme vzdálenost bodu [1,4] od přímky q.

$$d(p,q) = d(A,q) = \frac{|1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{19}{\sqrt{10}}.$$

ad b) V tomto případě musíme pro jednu z přímek zjistit její obecnou rovnici. Vyloučením parametru t v parametrických rovnicích přímky p získáme její obecnou rovnici ve tvaru: $5x - 2y + 25 = 0$ a za bod A můžeme vzít bod [2,1] ležící na přímce q.

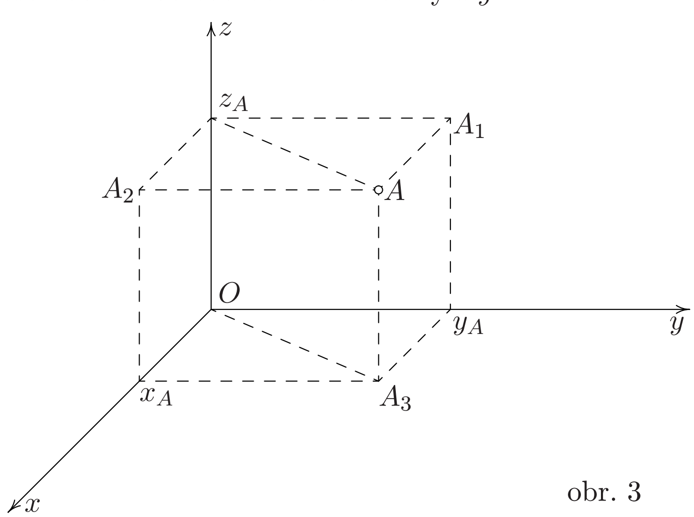
$$d(p,q) = d(A,p) = \frac{|5 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 25|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{33}{\sqrt{29}}.$$

ad c) Zde je třeba určit nějaký bod na jedné z přímek. Zvolíme si bod $A[-2, 0]$ na přímce q a opět použijeme vzorec (7):

$$d(p,q) = d(A,p) = \frac{|-2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

1.2 Vzdálenosti v prostoru

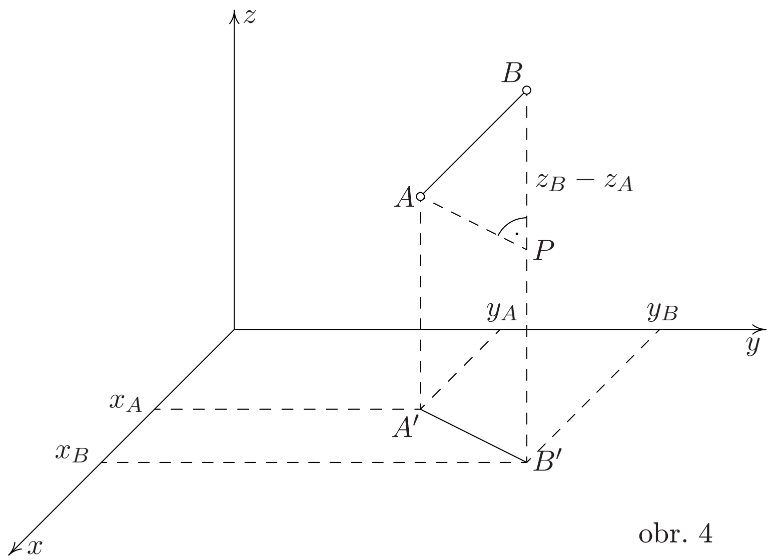
Budeme používat **kartézskou soustavu souřadnic**. Je tvořena třemi vzájemně kolmými **souřadnicovými osami** $x,\ y,\ z$, které se všechny protínají v jednom společném bodě – **počátku** O. Dvojicemi os jsou dány **souřadnicové roviny**. Bod A v prostoru je zadán třemi souřadnicemi $[x_A,\ y_A,\ z_A]$, kde x_A je vzdálenost bodu A od souřadnicové roviny $y\,z$ (na obrázku 3 je to délka úsečky AA_1), podobně y_A je vzdálenost bodu A od souřadnicové roviny $x\,z$ a z_A je vzdálenost bodu A od souřadnicové roviny $x\,y$.



obr. 3

1.2.1 Vzdálenost dvou bodů

Začneme obrázkem. Úkolem je určit vzdálenost bodů $A[x_A, y_A, z_A]$, $B[x_B, y_B, z_B]$ (místo značení $a_1, a_2, \ldots$ je nyní použito označení $x_A, y_A, \ldots$). I zde si vystačíme s Pythagorovou



obr. 4

větou, jen ji musíme použít dvakrát. Body A', B' jsou pravoúhlé průměty bodů A, B do roviny xy. Jejich vzdálenost už umíme spočítat. Podle vzorce (4) je

$$|A'B'| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \tag{8}$$

Útvar $A'B'PA$ je obdélník, tedy $|AP| = |A'B'|$, trojúhelník APB je pravoúhlý a AB je jeho přepona. Takže

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2.$$

Po dosazení za $|AP| = |A'B'|$ z rovnice (8) a za $|PB| = |z_B - z_A|$ a následném odmocnění získáme konečný vztah:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \tag{9}$$

Příklad 1

Určete vzdálenost bodů $A[5, -7, 2]$, $B[2, 4, -6]$.

Řešení

Dosadíme do rovnice (9):

$$|AB| = \sqrt{(2-5)^2 + (4+7)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{9 + 121 + 64} = \sqrt{194}.$$

1.2.2 Vzdálenost bodu od přímky

Přímka v prostoru bývá zadána buď obecně – jako průsečnice dvou rovin, nebo parametricky. Při výpočtu vzdálenosti bodu od přímky budeme používat parametrické zadání přímky, proto si nejprve ukážeme, jak se **obecné rovnice** přímky převádějí na parametrické. Obecné rovnice přímky (coby průsečnice dvou rovin) jsou:

$$p: \quad \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \tag{10}$$

Pro parametrické rovnice potřebujeme směrový vektor a libovolný bod přímky. Směrový vektor $\vec{p}$ přímky je roven vektorovému součinu normálových vektorů $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ příslušných rovin, $\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Bod $X_0[x_0,\, y_0,\, z_0]$ přímky získáme tak, že jednu jeho souřadnici zvolíme a zbylé vypočítáme z rovnic (10).
A můžeme psát parametrické rovnice přímky:

$$X = X_0 + \vec{p} \cdot t, \quad t \in \mathbf{R},$$

což rozepsáno dává

$$\begin{array}{l} x = x_0 + p_x\, t \\ y = y_0 + p_y\, t \qquad t \in \mathbf{R}. \\ z = z_0 + p_z\, t \end{array} \tag{11}$$

Příklad 2

Nalezněte parametrické rovnice přímky p, jestliže její obecné rovnice jsou:

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 10 \end{array} \tag{12}$$

Řešení

Vypočítáme směrový vektor $\vec{p}$:

$$\vec{p} = (2, -3, 1) \times (4, 2, -3) = (7, 10, 16)$$

Pro určení bodu X_0 přímky zvolíme např. $y_0 = 0$ a $x_0,\ z_0$ spočteme z rovnic (12). Vyjde $x_0 = 1,\ z_0 = -2$. Takže parametrické rovnice dané přímky jsou:

$$x = 1 + 7t, \quad y = 10\,t, \quad z = -2 + 16\,t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Vzdálenost bodu od přímky v prostoru můžeme počítat různými způsoby. V následujícím příkladu si ukážeme čtyři z nich. První sleduje stejný postup, jako kdybychom úlohu řešili konstruktivně. Tj. bodem A vedeme rovinu α kolmou k přímce p, nalezneme průsečík Q roviny s přímkou a vypočítáme délku úsečky AQ. Druhý způsob využívá toho, že skalární součin dvou vzájemně kolmých vektorů je roven nule. Třetí způsob bere na pomoc derivace a čtvrtý způsob je aplikací vektorového součinu.

Příklad 3

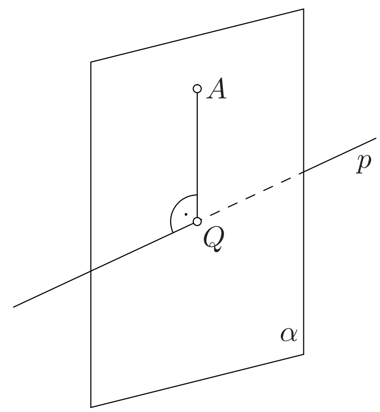
Určete vzdálenost bodu $A[3,-2,1]$ od přímky $p: x = 1-2t,\ y = 4+t,\ z = 2+2t$.

Řešení

1. způsob

Rovina α procházející bodem A a kolmá k přímce p má normálový vektor $\vec{n}$ rovný směrovému vektoru přímky p; $\vec{n} = \vec{p} = (-2,\ 1,\ 2)$. Obecná rovnice roviny je tedy:

$$-2(x-3) + y + 2 + 2(z-1) = 0, \text{ po úpravě}:$$
$$-2x + y + 2z + 6 = 0.$$



obr. 5

Pro nalezení průsečíku Q roviny α s přímkou p dosadíme z parametrických rovnic přímky do obecné rovnice roviny:

$$-2(1-2t) + (4+t) + 2(2+2t) + 6 = 0$$

a vypočítáme hodnotu parametru t :

$$9t + 12 = 0, \quad z\ toho:\ t = -\frac{4}{3}.$$

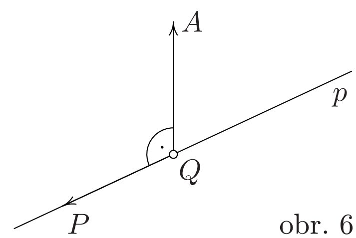
Zpětným dosazením t do parametrických rovnic přímky p získáme souřadnice bodu Q: $x_Q = 1 - 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{11}{3}$, $y_Q = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$, $z_Q = 2 + 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}$. Hledaná vzdálenost $d(A,p)$ je rovna délce úsečky AQ:

$$d(A,p) = |AQ| = \sqrt{\left(\frac{11}{3}-3\right)^2 + \left(\frac{8}{3}+2\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}-1\right)^2} = 5.$$

2. způsob

Nyní vyjdeme ze skutečnosti, že na přímce p je jediný bod (označíme si jej opět Q), který splňuje $\overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QP}$, kde $P \neq Q,\ P \in p$. Matematické vyjádření této skutečnosti je, že skalární součin $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QP} = 0$.

Bod A je dán $A[3,-2,1]$, bod Q je vyjádřen parametrickými rovnicemi přímky p, $Q[1-2t, 4+t, 2+2t]$ a za bod P můžeme vzít jakýkoli bod přímky p, např. bod [1,4,2] (odpovídá hodnotě parametru $t = 0$). Pak



obr. 6

$\overrightarrow{QA} = (2+2t, -6-t, -1-2t)$,

$\overrightarrow{QP} = (2t, -t, -2t)$,

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QP} = 2t(2+2t) - t(-6-t) - 2t(-1-2t) =$

$= t(4+4t+6+t+2+4t) = t(12+9t)$.

$$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QP} = 0 \quad \Rightarrow t(12+9t) = 0.$$

Poslední rovnice má dvě řešení: $t_1 = 0$, to odpovídá $Q = P$, což jsme vyloučili, druhé řešení $t_2 = -\dfrac{4}{3}$ dává tutéž hodnotu parametru t jako v předchozím případě. Dál by byl výpočet stejný a dostali bychom opět

$$d(A, p) = |AQ| = 5.$$

3. způsob

Využijeme výpočtu minima funkce pomocí derivace. Vzdálenost bodu A od přímky p je rovna délce nejkratší z úseček AX, kde X je bod přímky p. Délka úsečky AX je

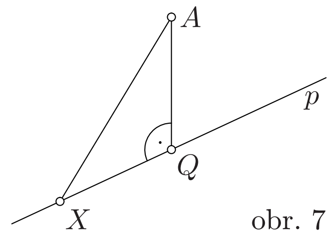
$$|AX| = \sqrt{(3 - (1 - 2t))^2 + (-2 - (4 + t))^2 + (1 - (2 + 2t))^2} =$$

$$= \sqrt{(2 + 2t)^2 + (-6 - t)^2 + (-1 - 2t)^2}$$

Nadefinujeme funkci

$$f(t) = |AX|^2 = (2 + 2t)^2 + (-6 - t)^2 + (-1 - 2t)^2.$$

Funkce má lokální minimum pro hodnotu parametru t, která odpovídá bodu Q přímky p, jenž je nejblíž bodu A. Je zřejmé, že funkce má pouze jediné lokální minimum, stačí tedy zjistit stacionární bod z podmínky: $f'(t) = 0$.



obr. 7

$$f'(t) = 2(2 + 2t)2 + 2(-6 - t)(-1) + 2(-1 - 2t)(-2) = 24 + 18t$$

$$f'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 24 + 18t = 0, \quad tj.\ t = -\frac{4}{3}$$

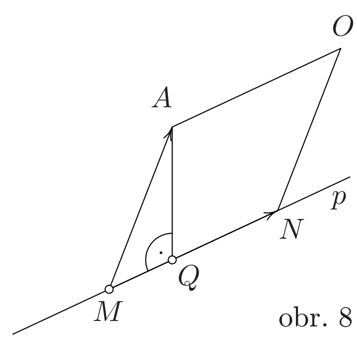
a jsme tam, kde jsme byli již podvakráte. Tedy i tentokrát vychází

$$d(A, p) = |AQ| = 5.$$

4. způsob

Z parametrických rovnic přímky p určíme libovolné dva body M, N ležící na přímce. Např. pro bod M volíme $t = 0$, tj. $M = [1, 4, 2]$, pro N $t = 1$, takže $N = [-1, 5, 4]$. Vzdálenost bodu A od přímky p je potom rovna výšce rovnoběžníku $MNOA$ (obsah rovnoběžníku je roven velikosti vektorového součinu $|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MA}|$).

$$d(A, p) = |AQ| = \frac{|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MN}|}$$



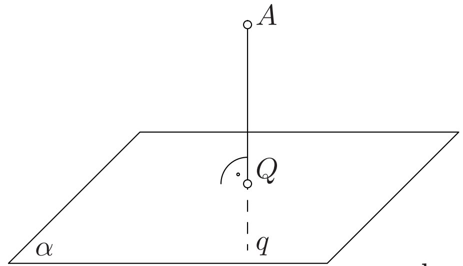
obr. 8

Dosadíme hodnoty $\overrightarrow{MN} = (-2, 1, 2)$, $\overrightarrow{MA} = (2, -6, -1)$ a dostaneme pro vzdálenost:

$$d(A, p) = \frac{|(11, 2, 10)|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{15}{3} = 5.$$

1.2.3 Vzdálenost bodu od roviny

Odvodíme vztah pro vzdálenost bodu $A[x_0, y_0, z_0]$ od roviny α dané obecnou rovnicí: $ax+by+cz+d=0$. Hledaná vzdálenost je rovna délce úsečky AQ, kde Q je průsečík kolmice q k rovině α vedené bodem A.



obr. 9

Přímka q má parametrické rovnice (směrový vektor přímky q je normálový vektor roviny α):

$$q: \begin{array}{l} x = x_0 + a\,t, \\ y = y_0 + b\,t, \\ z = z_0 + c\,t, \end{array} \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{13}$$

Dosazením parametrických rovnic přímky q do obecné rovnice roviny α dostaneme hodnotu parametru t pro bod Q:

$$a(x_0 + a\,t) + b(y_0 + b\,t) + c(z_0 + c\,t) + d = 0,$$

z toho

$$t = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{14}$$

Délka úsečky AQ je:

$$|AQ| = \sqrt{(x_0 + a\,t - x_0)^2 + (y_0 + b\,t - y_0)^2 + (z_0 + c\,t - z_0)^2} = \sqrt{(at)^2 + (bt)^2 + (ct)^2} =$$

$$= |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

za t dosadíme z rovnice (14) a získáme hledaný vztah pro vzdálenost bodu $A[x_0, y_0, z_0]$ od roviny α: $ax + by + cz + d = 0$

$$d(A, \alpha) = \frac{|\,ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{15}$$

Při výpočtu vzdálenosti bodu od roviny můžeme rovněž využít smíšeného součinu vektorů; ukážeme si to v dalším příkladu.

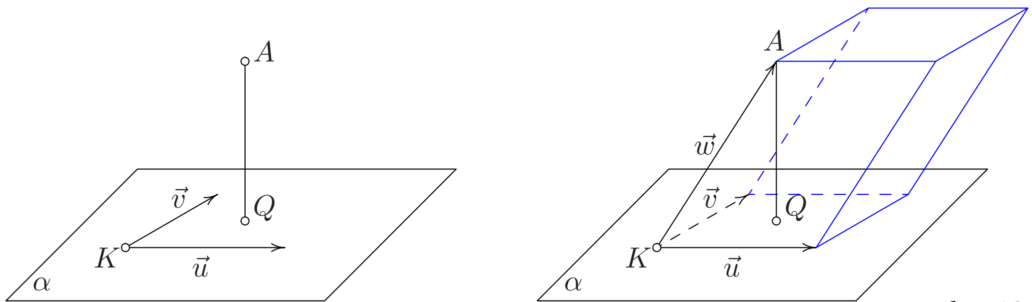
Příklad 4

Určete vzdálenost bodu $A[5, 1, -2]$ od roviny α: $X = [2, 0, 1] + t(1, -1, 1) + s(4, -1, 0)$, $t, s \in \mathbf{R}$.

Řešení

1. způsob

Použijeme vzorec (15). K tomu potřebujeme převést parametrické rovnice roviny α na obecnou rovnici. Můžeme buď z parametrických rovnic vhodnými úpravami vyloučit parametry t, s, nebo ze zadaných vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ roviny (obr.10) vypočítat vektorovým součinem normálový vektor.



obr. 10

Vypočítáme normálový vektor:

$$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (4, -1, 0) = (1, 4, 3).$$

Z parametrických rovnic vyplývá, že rovina α obsahuje bod $K[2, 0, 1]$, takže její obecná rovnice je:

$$x - 2 + 4(y - 0) + 3(z - 1) = 0$$

a po úpravě

$$x + 4y + 3z - 5 = 0$$

Teď již stačí dosadit do vztahu (15):

$$d(A, \alpha) = \frac{|1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{1 + 16 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{26}}$$

2. způsob

Víme, nebo bychom mohli vědět, že smíšený součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, které nejsou komplanární (nelze je umístit do jedné roviny), je číselně roven objemu rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou umístěním těchto vektorů (obr. 10). Objem každého rovnoběžnostěnu je roven součinu velikosti podstavy a velikosti výšky. Velikost podstavy v našem případě je rovna velikosti vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ a výška udává hledanou vzdálenost bodu A od roviny α. Tj.

$$d(A, \alpha) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Za vektory dosazujeme: $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (4, -1, 0)$, $\vec{w} = \overrightarrow{KA} = (3, 1, -3)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 0 + 4 - (-3 + 0 + 12) = -2.$$

Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ máme už spočítaný: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{n} = (1, 4, 3)$. Potom

$$d(A, \alpha) = \frac{|-2|}{\sqrt{1 + 16 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{26}}.$$

Poznámka: Bystrý čtenář si mohl všimnout, že ač použité postupy vypadají různě, prováděné početní operace jsou v obou případech v podstatě stejné, zvláště když smíšený součin bereme ve tvaru $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

1.2.4 Vzdálenost mimoběžek

Vzdálenost mimoběžek je rovna délce jejich nejkratší příčky, tj. té příčky, která je k oběma mimoběžkám kolmá (obr. 11). Výpočet opět ukážeme na příkladu.

Příklad 5

Určete vzdálenost mimoběžek a, b, kde přímka a je dána bodem $A[2, 1, -1]$ a směrovým vektorem $\vec{a} = (1, 1, 1)$, přímka b je dána bodem $B[1, 0, 2]$ a směrovým vektorem $\vec{b} = (0, -2, 1)$.

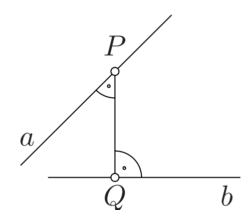
Řešení

1. způsob

Budeme hledat krajní body $P \in a$, $Q \in b$ nejkratší příčky mimoběžek a, b. Z parametrických rovnic přímky a: $X = [2, 1, -1] + t\,(1, 1, 1)$ a přímky b: $X = [1, 0, 2] + s\,(0, -2, 1)$ vyjádříme body $P = [2, 1, -1] + t_p\,(1, 1, 1)$, $\quad Q = [1, 0, 2] + s_q\,(0, -2, 1)$ a vektor

$$\overrightarrow{QP} = (1, 1, -3) + t_p\,(1, 1, 1) - s_q\,(0, -2, 1), \text{ tj.}$$

$$\overrightarrow{QP} = (1 + t_p, 1 + t_p + 2s_q, -3 + t_p - s_q).$$



obr. 11

Vektor $\overrightarrow{QP}$ musí být kolmý k oběma mimoběžkám, takže skalární součiny

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{QP} = \vec{b} \cdot \overrightarrow{QP} = 0.$$

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{QP} = 1 + t_p + 1 + t_p + 2s_q - 3 + t_p - s_q = 3\,t_p + s_q - 1 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \overrightarrow{QP} = -2 - 2t_p - 4s_q - 3 + t_p - s_q = -t_p - 5s_q - 5 = 0$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé t_p, s_q:

$$\begin{aligned} 3\,t_p + s_q - 1 &= 0 \\ -t_p - 5\,s_q - 5 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad t_p = \frac{5}{7}, \;\; s_q = -\frac{8}{7}.$$

Ze získaných hodnot parametrů vypočítáme souřadnice bodů

$$P = \left[\frac{19}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{2}{7}\right], \; Q = \left[1, \frac{16}{7}, \frac{6}{7}\right].$$

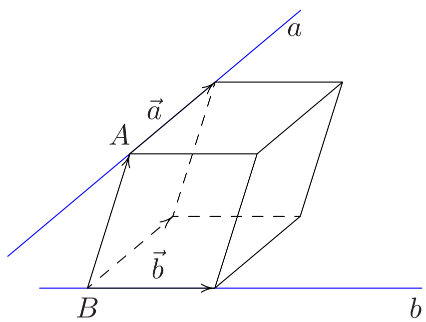
Hledaná vzdálenost je

$$d(a,b) = |QP| = \left|\left(\frac{12}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}\right)\right| = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

2. způsob

Opět využijeme smíšeného součinu. Z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{BA}$ utvoříme rovnoběžnostěn (obr. 12). Vzdálenost přímek a, b je pak rovna vzdálenosti horní a dolní podstavy, tj. výšce rovnoběžnostěnu. Výška $= \dfrac{\text{objem}}{\text{obsah podstavy}}$. Tedy

$$d(a,b) = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{BA}]|}{|(\vec{a} \times \vec{b})|} = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \overrightarrow{BA}|}{|(\vec{a} \times \vec{b})|}.$$



obr. 12

V našem případě je: $\overrightarrow{BA} = (1, 1, -3)$, $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, -2, 1)$. Pak

$$d(a,b) = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \overrightarrow{BA}|}{|(\vec{a} \times \vec{b})|} = \frac{|(3, -1, -2) \cdot (1, 1, -3)|}{|(3, -1, -2)|} = \frac{|3 - 1 + 6|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{14}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}.$$