URČITÝ INTEGRÁL a jeho aplikace

Newton-Leibnizova formule

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{kde } F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti

1) $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{kde } a < b < c$$

2) $$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } f \text{ sudou,}$$
$$= 0 \qquad \text{pro } f \text{ lichou.}$$

3) $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

4) $$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Substituce

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{cc} t = g(x) & \mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x \\ \alpha = g(a) & \beta = g(b) \end{array}\right] = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = F(\beta) - F(\alpha)$$

Per partes

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklady

1) a) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{1+2x^2}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{x^4+3}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,\cos x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{e}^{2x^2}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x$.

2) a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^2 (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(4x-\pi/2)\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_{-1/2}^{5/4} \frac{1}{\sqrt[3]{(4x+3)^4}}\,\mathrm{d}x$.

g) $\displaystyle\int_0^1 3^{2x-7}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{(x^2+3x+8)^4}\,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\,\mathrm{d}x$

3) a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,\cos 2x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 2x\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\,\cos 2x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\,\sin x\,\mathrm{d}x$

Nevlastní integrály

4) a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}}$.

5) a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}}$, b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$, c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$,

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, f) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky (zcela bez záruky)

1) a) $\frac{13}{3}$, b) $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{1}{\ln 2}$, e) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^8-1)$, f) 0.

2) a) $\frac{4}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{22}(1+3^{11})$, d) 0, e) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}$, f) $\frac{3}{8}$,

g) $\frac{4}{3^7\,\ln 3}$, h) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8^3}-\frac{1}{12^3}\right)$, i) $2\sqrt{\mathrm{e}+3}-4$.

3) a) $-\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4\,\mathrm{e}^2}$, c) 1, d) $\frac{\pi}{4}$, e) $-\frac{1}{5}(1+\mathrm{e}^{\pi/2})$, f) $\pi-2$.

4) a) 1, b) -4, c) $\frac{1}{4}$, d) $\ln\frac{3}{2}$, e) ∞, f) $1-\ln 2$, g) $2\sqrt{2}$.

5) a) $\frac{8}{3}\sqrt{2}$, b) $\frac{8}{3}$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) $\ln(2+\sqrt{3})$, e) $\frac{\pi}{4}$, f) 2.

Řešení vybraných příkladů

4) b) Jde o nevlastní integrál vlivem funkce. Integrovaná funkce je spojitá na $(0,\,1\rangle$, ale v okolí nuly je neomezená. Spočítáme proto integrál v mezích a, 1, kde $0<a\le 1$ a posléze přejdeme k limitě $a\to 0^+$.

$$\int_a^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_a^1 x^{-1/2}\,\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u' = x^{-1/2},\ u = 2\,x^{1/2} \\ v = \ln x,\ v' = \dfrac{1}{x} \end{array}\right] = 2\,\left[x^{1/2}\ln x\right]_a^1 - \int_a^1 2\,\underbrace{x^{1/2}\,\frac{1}{x}}_{x^{-1/2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 0 - 2\sqrt{a}\,\ln a - \left[4\,x^{1/2}\right]_a^1 = -2\sqrt{a}\,\ln a - 4 + 4\,\sqrt{a}$$

Zbývá spočítat limitu.

$$\lim_{a\to 0^+}(-2\sqrt{a}\,\ln a - 4 + 4\,\sqrt{a}) = \left[\begin{array}{c} \text{Problémy působí} \\ \text{pouze první člen.} \\ \text{Zkusíme "L'Hospitala"} \end{array}\right] = \lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{2\,\ln a}{a^{-1/2}} - 4\right) =$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{-2/a}{-1/2\cdot a^{-3/2}} - 4\right) = \lim_{a\to 0^+}\left(4\,a^{1/2} - 4\right) = -4, \text{ a tedy}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -4.$$

4) d) Jde o nevlastní integrál vlivem meze. Vypočteme $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x,\ b > 0$ a následně limitu pro $b \to \infty$. Nejprve rozložíme integrand na parciální zlomky.

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)\,(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A\,(x+3) + B\,(x+2)}{(x+2)\,(x+3)} \quad \Rightarrow$$

$A\,(x+3) + B\,(x+2) = 1.$ Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x a dostaneme:

$\left.\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 0 \\ 3A & + & 2B & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1,\ B = -1.$ Nebo lépe; do rovnice dosadíme kořeny jmenovatele: $\left.\begin{array}{ll} x = -2: & A = 1, \\ x = -3: & -B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -1. \end{array}\right\}$ Náš integrál je tedy $\displaystyle\int_0^b \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x =$

$$= \left[\ln|x+2| - \ln|x+3|\right]_0^b = \ln\left|\frac{b+2}{b+3}\right| - \ln\frac{2}{3}.$$

$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{b+2}{b+3}\right| = 0$ (Limita vnitřní funkce je 1, $\ln 1 = 0$.) A máme výsledek, hurá!!!

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{3}{2},$$

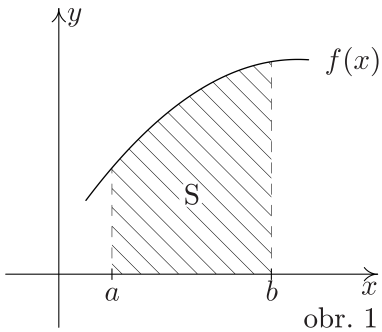
Většinou se však při výpočtu nevlastních integrálů limity nepíší, prostě se dosadí patřičné hodnoty. A protože je škoda nevyužít volného místa, zde je ještě jeden příklad.

5) c) Jde o nevlastní integrál vlivem funkce, integrand není definovaný pro $x = -1$.

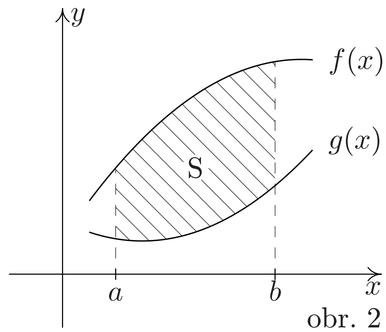
$$\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{c} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \\ \alpha = -\pi/2,\ \beta = 0 \end{array}\right] = \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos t}{|\cos t|}\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^0 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

Obsah rovinné plochy



obr. 1



obr. 2

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x,$$

Objem rotačního tělesa, vzniklého rotací vyšrafované plochy (obr. 1) kolem osy x.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Délka křivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{pro křivku } y = f(x),\ x \in \langle a,\, b\rangle.$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{pro křivku } x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \langle \alpha,\, \beta\rangle.$$

Obsah rotační plochy vzniklé rotací rovinné křivky l kolem osy x.

$$S = 2\,\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{rotuje křivka } y = f(x),\ x \in \langle a,\, b\rangle.$$

$$S = 2\,\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{rotuje křivka } x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \langle \alpha,\, \beta\rangle.$$

Těžiště plošného útvaru (obr. 1) o konstantní plošné hustotě σ.

$$x_T = \frac{S_y}{M}, \quad \text{kde statický moment } S_y = \int_a^b \sigma\, x f(x)\,\mathrm{d}x \text{ a hmotnost } M = \int_a^b \sigma\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y_T = \frac{S_x}{M}, \quad \text{kde statický moment } S_x = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma\, f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklady

1) Určete obsah rovinného oboru, ohraničeného

a) křivkami $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = \dfrac{1}{1+x^2}$,

b) souřadnicovými osami a křivkou $x = t^2$, $y = \cos t$, $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$,

c) souřadnicovými osami a křivkou $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$.

2) Určete délku křivky

a) $y = \sqrt{8x^3}$, $x \in \langle 0.1\rangle$,

b) $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$,

c) kružnice o poloměru r,

d) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (jeden oblouk cykloidy).

3) Určete objem

a) koule,

b) kužele s podstavou o poloměru r a výškou v,

c) rotačního paraboloidu s podstavou o poloměru r a výškou v,

d) tělesa, které vznikne rotací rovinného oboru ohraničeného osou x
a parametricky zadanou křivkou $x = \operatorname{arctg} t$, $y = 1 - t^2$.

Výsledky

1) a) $\pi/2 - 1/3$, b) $\pi - 2$, c) $3\pi/8$.

2) a) $\dfrac{1}{27}(19\sqrt{19} - 1)$, b) 3, c) $2\pi r$, d) $8a$.

3) a) $\dfrac{4}{3}\pi r^3$, b) $\dfrac{1}{3}\pi r^2 v$, c) $\dfrac{1}{2}\pi r^2 v$, d) $2\pi\left(\pi - \dfrac{8}{3}\right)$.

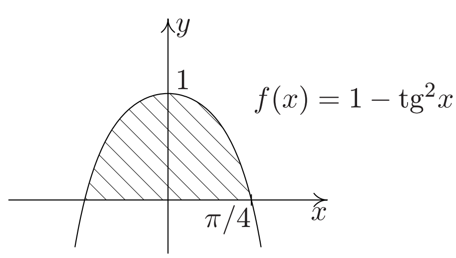
Řešení vybraných příkladů

3) d) Nejprve určíme průsečíky křivky s osou x (tj. meze příslušného integrálu).
$y = 1 - t^2 = 0 \quad \Rightarrow t = \pm 1$. Objem spočítáme ze vztahu

$$V = \pi \int_{-1}^{1} y^2(t)\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c}\text{integrovaná}\\ \text{funkce je sudá}\end{array}\right] = 2\pi \int_0^1 (1-t^2)^2 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^1 \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(t^2 - 3 + \frac{4}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 2\pi \left[\frac{t^3}{3} - 3t + 4\operatorname{arctg} t\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3} - 3 + \pi - 0\right) = 2\pi\left(\pi - \frac{8}{3}\right).$$

A koho zajímá, jaká že plocha vlastně rotuje, zde je obrázek.



Fyzikální aplikace

1) Těžiště trojúhelníku, aneb okénko do analytické geometrie. Určete těžiště homogenního trojúhelníku ABC, kde $A\,[\,0,0\,]$, $B\,[\,7,0\,]$, $C\,[\,5,4\,]$.

Řešení:

rovnice přímky dané dvěma body $A\,[x_A, y_A]$ $B\,[x_B, y_B]$ je:

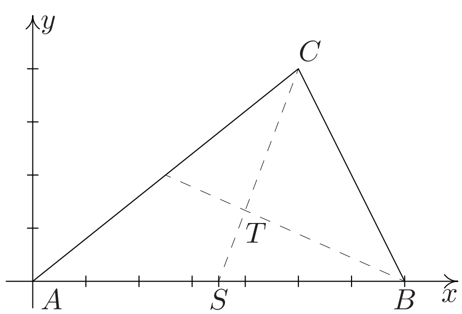
$y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,(x - x_A)$.

Pro zadané body vychází:

$AC:\ y = \dfrac{4}{5}x, \quad BC:\ y - 4 = \dfrac{0-4}{7-5}\,(x-5)$, což upraveno dává $\quad y = -2x + 14.$

A můžeme směle použít vzorce ze strany 4. Protože je trojúhelník homogenní, je jeho plošná hustota konstantní a nemusíme s ní počítat, což učiníme. Tj. můžeme položit $\sigma = 1$.

$$M = \int_0^5 \frac{4}{5}x\,\mathrm{d}x + \int_5^7 (-2x+14)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{5}\,\frac{x^2}{2}\right]_0^5 + \left[-2\frac{x^2}{2} + 14x\right]_5^7 = 14$$



Nebo jsme si mohli namalovat obrázek a uvědomit si, že hmotnost trojúhelníku je při jednotkové plošné hustotě číselně rovna jeho obsahu a ten je základna krát výška lomeno dvěma, tedy $7 \cdot 4/2 = 14$.

$$S_x = \frac{1}{2}\left(\int_0^5 \frac{16}{25}x^2\,\mathrm{d}x + \int_5^7 (-2x+14)^2\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \left[\frac{8}{25}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^5 + \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{(-2x+14)^3}{3}\right]_5^7 = \frac{56}{3}$$

$$S_y = \int_0^5 x\,\frac{4}{5}x\,\mathrm{d}x + \int_5^7 x\,(-2x+14)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^5 + \left[-2\frac{x^3}{3} + 14\frac{x^2}{2}\right]_5^7 = 56.$$

Takže těžiště má souřadnice

$x_T = \dfrac{S_y}{M} = 4, \qquad y_T = \dfrac{S_x}{M} = \dfrac{4}{3}.$

Je-li trojúhelník homogenní, splývá fyzikální těžiště (hmotný střed) s geometrickým. Snadno se o tom přesvědčíme, ať už budeme počítat těžiště jako průsečík těžnic, nebo třeba takto:

$T = S + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC} = [3.5, 0] + \dfrac{1}{3}(1.5, 4) = [4, 4/3].$

2) Určete souřadnice těžiště rovinného oboru ohraničeného první větví cykloidy a osou x. Cykloida má parametrické rovnice: $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

3) Určete souřadnice těžiště první větve cykloidy (coby křivky).

4) Určete souřadnice těžiště rovinného oboru v prvním kvadrantu, ohraničeného částí asteroidy $x = a\,\cos^3 t$, $y = a\,\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$ a osami x a y.

Výsledky

2) $T = [\,a\pi, 5a/6\,]$ 3) $T = [\,a\pi, 4a/3\,]$ 4) $T = [\,256\,a/315\pi,\ 256\,a/315\pi]$.