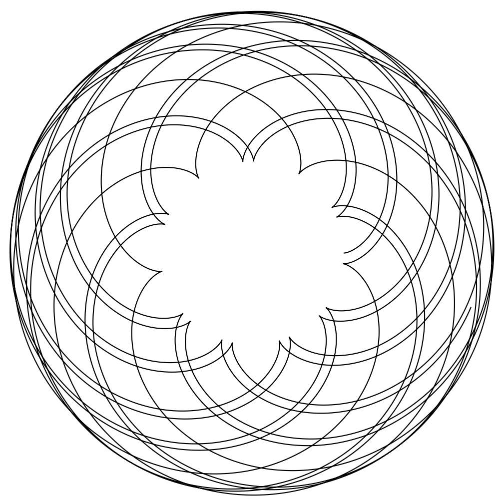
# Transformace grafů funkcí



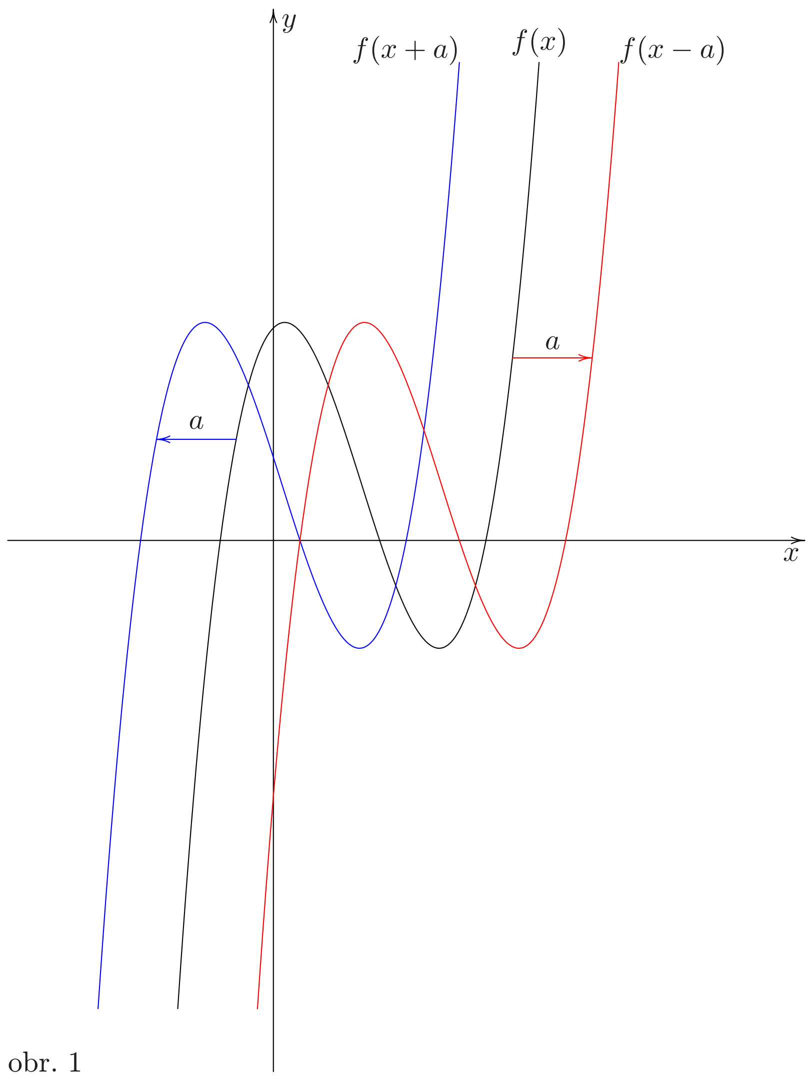
## Obsah

Znalost jednoduchých transformací grafů funkcí podstatně rozšiřuje možnosti kreslení grafů. Budeme vycházet ze známého grafu funkce $y = f(x)$ a ukážeme si, co s grafem provede lineární transformace argumentu nebo funkční hodnoty, nahrazení argumentu nebo funkční hodnoty jejich absolutními hodnotami a převrácení funkční hodnoty.

## 1 Posunutí ve směru osy $x$

$y = f(x \pm a)$

Úkolem je nakreslit graf funkce $y = f(x \pm a)$, $a > 0$, známe-li graf funkce $y = f(x)$. Graf funkce $y = f(x - a)$, $a > 0$ vznikne posunutím grafu $y = f(x)$ v kladném směru osy $x$, tj. doprava o $a$ jednotek. Graf se nikterak nedeformuje. Máme-li nakreslit graf $y = f(x + a)$, posouváme původní graf o $a$ jednotek v záporném směru osy $x$, tedy doleva.

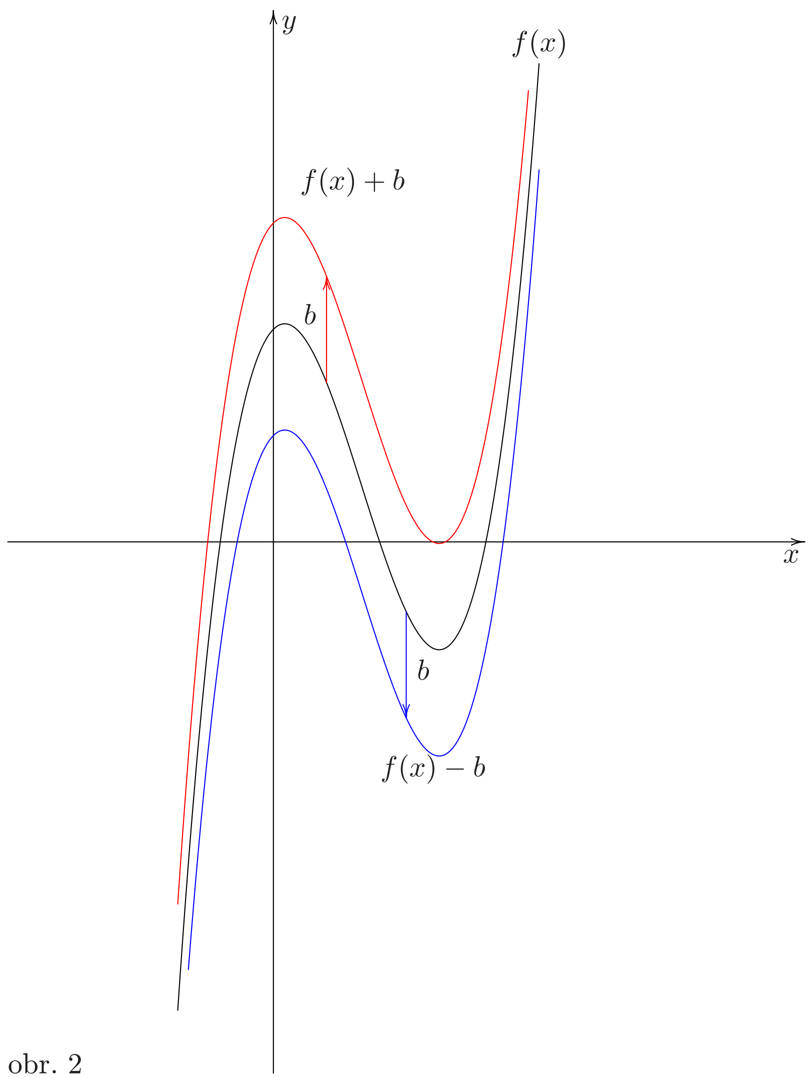



obr. 1

## 2 Posunutí ve směru osy $y$

$y = f(x) \pm b$

Graf funkce $y = f(x) + b,\ b > 0$ se dostane posunutím grafu $y = f(x)$ o $b$ jednotek v kladném směru osy $y$, tj. nahoru, graf $y = f(x) - b,\ b > 0$ vznikne posunutím původního grafu o $b$ jednotek dolů, tj. v záporném směru osy $y$. Možná se zdá někomu divné, že zatímco $y = f(x-a)$ znamená posunutí v kladném směru osy $x$, $y = f(x) - b$ znamená posutí v záporném směru osy $y$, čili jakoby analogie pokulhávala. Ale napíše-li se písmenko $b$ k proměnné $y$, ke které se vztahuje: $y + b = f(x)$, analogie pracuje, jak bychom očekávali.

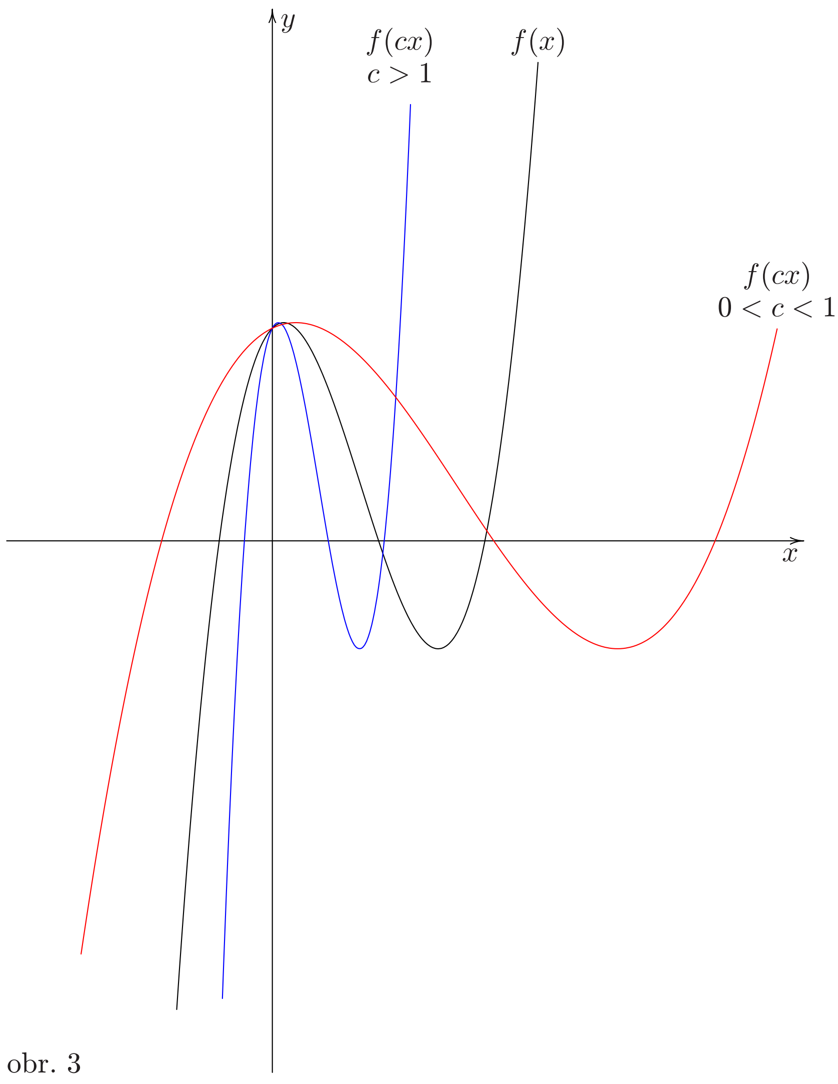



obr. 2

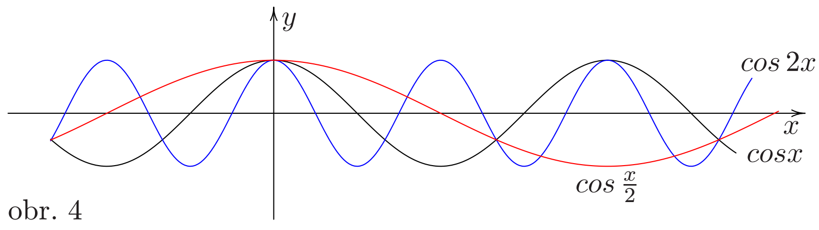
## 3 Kontrakce a dilatace ve směru osy $x$

$y = f(cx)$

Je-li argument funkce násoben číslem $c > 0$, projeví se to na grafu buď jako kontrakce - stlačení ve směru osy $x$ (pro $c > 1$), nebo dilatace - prodloužení ve směru osy $x$ (pro $0 < c < 1$). Jako bychom na "konce" osy $x$ tlačili, nebo za ně naopak tahali. Pokud existuje průsečík grafu s osou $y$, zůstává na místě, případné průsečíky s osou $x$ se podle hodnoty čísla $c$ zhušťují, nebo vzájemně vzdalují. Hodnoty maxim a minim funkce zůstávají zachovány, nikoli však body, ve kterých funkce minima nebo maxima nabývá. U periodických funkcí se mění perioda, zatímco amplituda zůstává stejná, viz obr. 4.




obr. 3

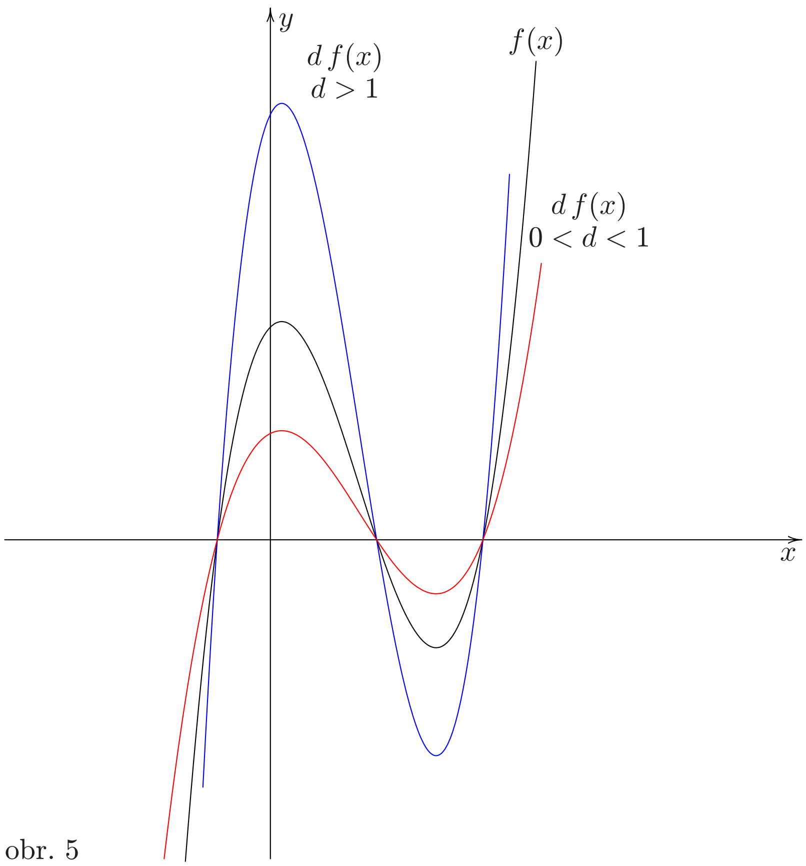



obr. 4

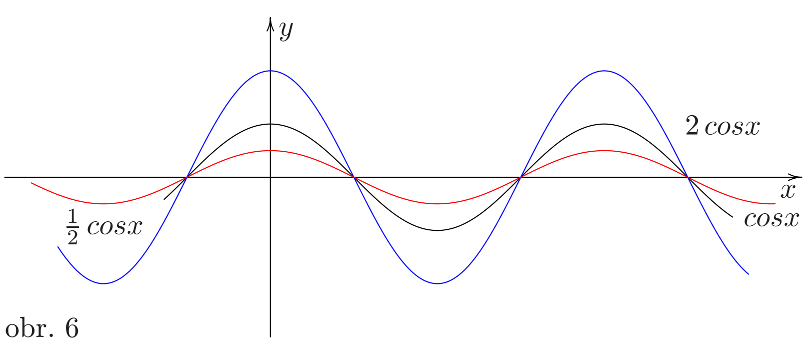
# 4 Kontrakce a dilatace ve směru osy *y*

$y = d\,f(x)$

Násobení funkční hodnoty číslem $d > 1$, znamená protažení - dilataci grafu ve směru osy $y$, násobení číslem $0 < d < 1$ představuje stlačení - kontrakci ve směru osy $y$. Případný průsečík grafu s osou $y$ se posouvá, průsečíky s osou $x$, pokud jsou, zůstávají na místě. Hodnoty maxim a minim se podle hodnoty $d$ zvětšují nebo zmenšují. U periodických funkcí se mění amplituda, perioda zůstává stejná.




obr. 5

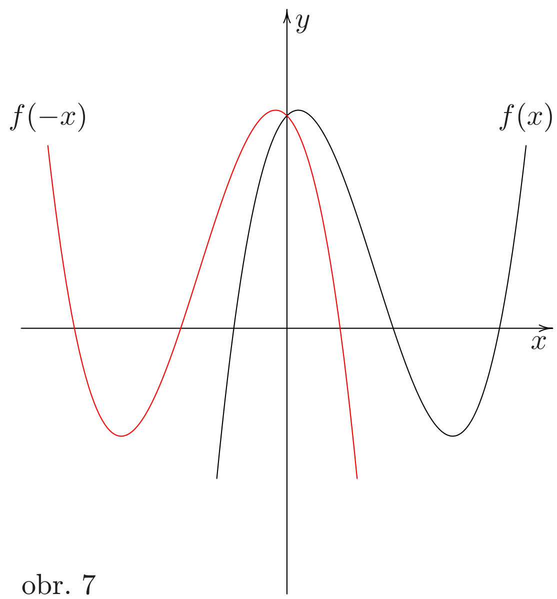



obr. 6

## 5 Překlopení podle osy $y$

$y = f(-x)$

Graf funkce $y = f(-x)$ je osově souměrný s grafem $y = f(x)$ podle osy $y$.

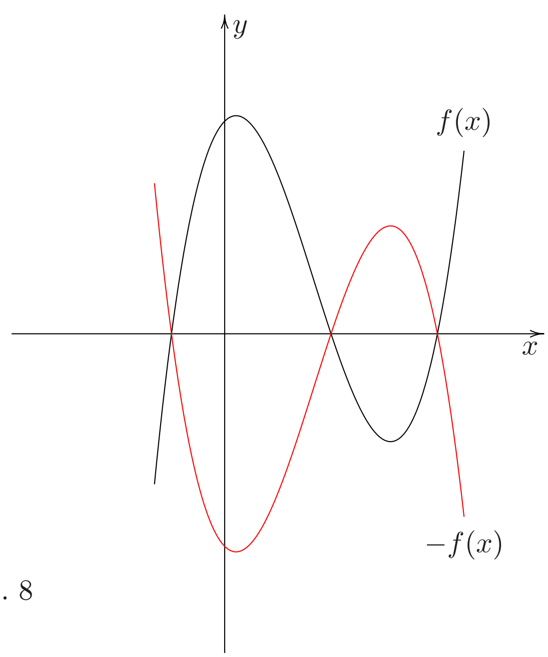



obr. 7

## 6 Překlopení podle osy $x$

$y = -f(x)$

Graf funkce $y = -f(x)$ je osově souměrný s grafem $y = f(x)$ podle osy $x$.

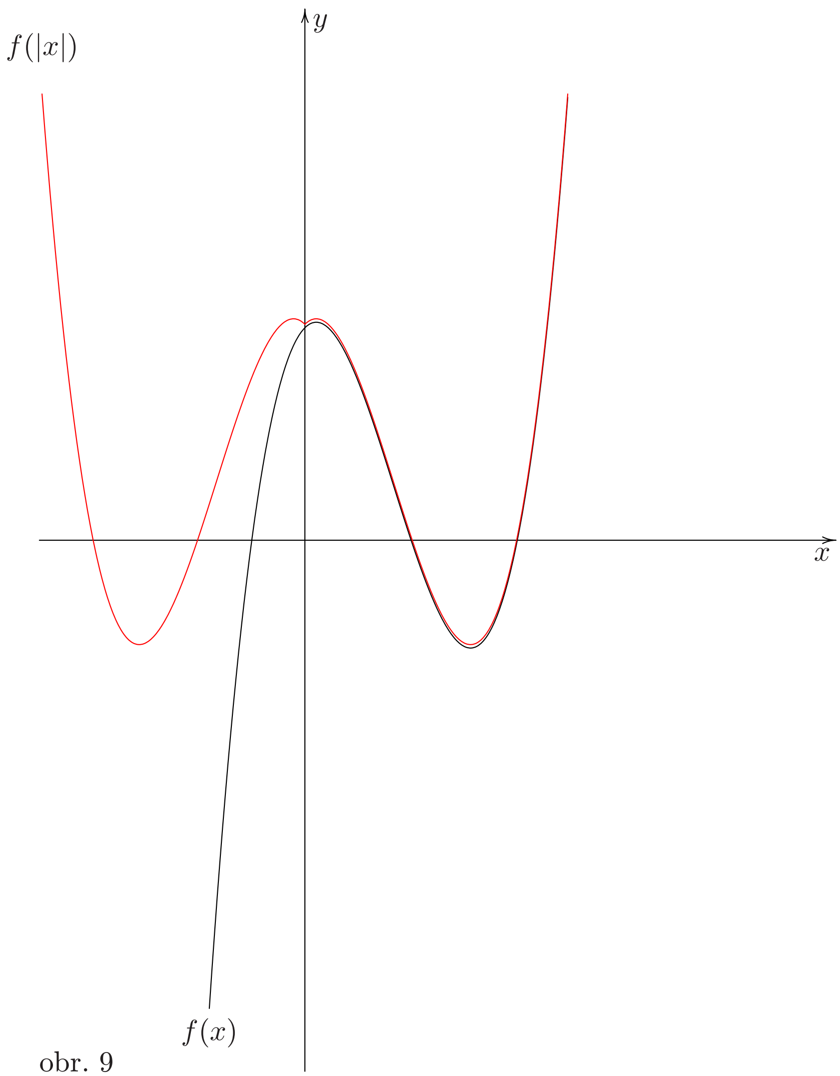



obr. 8

# 7 Absolutní hodnota argumentu

$y = f(|x|)$

Protože $|-x| = |x|$, je funkce $y = f(|x|)$ vždy sudá a její graf je tudíž symetrický podle osy $y$.
a) Pro $x \geq 0$ je $|x| = x$, tj. $f(|x|) = f(x)$ a příslušné části obou grafů splývají (jsme napravo od osy $y$).
b) Pro $x < 0$ je $|x| = -x$, tj. $f(|x|) = f(-x)$ a graf dostaneme překlopením pravé části grafu podle osy $y$.

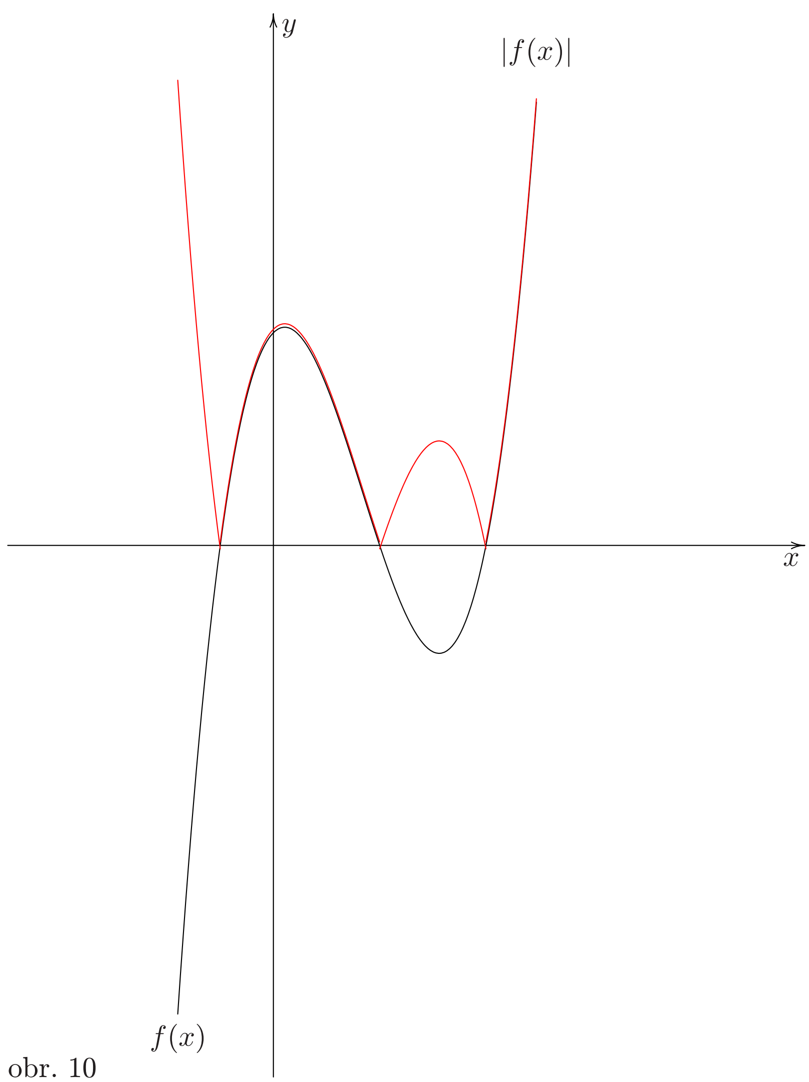



obr. 9

## 8 Absolutní hodnota funkční hodnoty

$y = |f(x)|$

Graf funkce $y = |f(x)|$ dostaneme následovně: ty části grafu $f(x)$, které leží nad osou $x$ (kladné funkční hodnoty), překopírujeme, ty, které leží pod osou $x$ (záporné funkční hodnoty), překlopíme podle osy $x$ nahoru.




obr. 10

## 9 Převrácená hodnota funkční hodnoty

$y = \dfrac{1}{f(x)}$

Pro načrtnutí grafu $y = \dfrac{1}{f(x)}$ na základě známého grafu $y = f(x)$ je třeba si uvědomit, že:

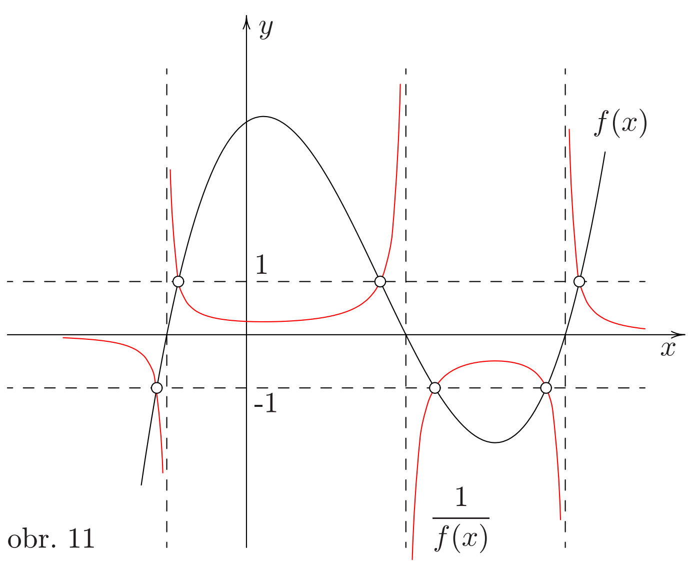
1) $\dfrac{1}{1} = 1, \quad \dfrac{1}{-1} = -1 \quad \Rightarrow$ body grafu, v nichž $f(x) = \pm 1$ jsou společné pro oba grafy $f(x)$ i $\dfrac{1}{f(x)}$ (v grafu vyznačeno kroužky).

2) Je-li $f(x) > 1$, potom $0 < \dfrac{1}{f(x)} < 1 \quad \Rightarrow$ tam, kde původní graf leží v horní polorovině vymezené přimkou $y = 1$, bude graf převrácené funkce ležet v pásu mezi osou $x$ a přímkou $y = 1$. A naopak pro $0 < f(x) < 1$ je $\dfrac{1}{f(x)} > 1$, tzn., že částem grafu $f(x)$ v pásu mezi osou $x$ a přímkou $y = 1$ budou odpovídat části grafu $\dfrac{1}{f(x)}$ v horní polorovině určené přímkou $y = 1$.

3) Podobně pro $f(x) < -1$ je $-1 < \dfrac{1}{f(x)} < 0$, graf se z dolní poloroviny pod přímkou $y = -1$ přesouvá mezi přímky $y = -1$ a osu $x$, naopak pro $-1 < f(x) < 0$ je $\dfrac{1}{f(x)} < -1$ a graf putuje z pásu mezi přímkou $y = -1$ a osou $x$ do dolní poloroviny pod přímku $y = -1$.

4) Konečně tam, kde (ve smyslu limity) $f(x) = 0^{\pm}$, je $\dfrac{1}{f(x)} = \pm\infty$ a naopak. Graficky: kde graf původní funkce má průsečíky s osou $x$, bude mít převrácená funkce svislé asymptoty, v bodech, kde původní funkce má svislé asymptoty, převrácená funkce může (je třeba prozkoumat definiční obor) mít průsečíky s osou $x$.

Je-li původní funkce rostoucí a zachovává znaménko, převrácená funkce bude klesající a naopak, bod lokálního maxima se mění na bod minima a naopak. Sudost, lichost, periodičnost se při převrácení funkčních hodnot zachovává.




obr. 11

## Příklad 1

Načrtněte grafy funkcí $y = \dfrac{1}{x^2-2x-3}$, $\quad y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $\quad y = \dfrac{1}{x^2-2x+2.5}$, $\quad y = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$.

*Řešení:*

U všech zadaných funkcí vyjdeme z toho, že umíme nakreslit graf kvadratické funkce a z něho graf převrácené hodnoty funkce.

a) $y = \dfrac{1}{x^2-2x-3} = \dfrac{1}{f(x)}$

Nejprve nakreslíme graf funkce $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Grafem je parabola. Zjistíme souřadnice jejího vrcholu (z upraveného tvaru: $y = (x-1)^2 - 4$) a průsečíky s osami (použijeme součinový tvar $y = (x-3)(x+1)$). Vrchol je $V[1, -4]$, průsečík s osou $y$ je $P_y[0, -3]$, průsečíky s osou $x$ jsou $P_{1x}[-1, 0]$, $P_{2x}[3, 0]$.
Načrtneme parabolu a pro získání grafu převrácené funkce aplikujeme postup uvedený v kapitole 9 (obr. 12). Společné body obou grafů jsou průsečíky paraboly s přímkami $y = -1$ a $y = 1$, svislé asymptoty převrácené funkce procházejí body, kde parabola protíná osu $x$, $x = -1$ a $x = 3$. Parabola $y = x^2 - 2x - 3$ je osově souměrná podle přímky $x = 1$, převrácená funkce má tutéž symetrii.

b) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{f(x)}$

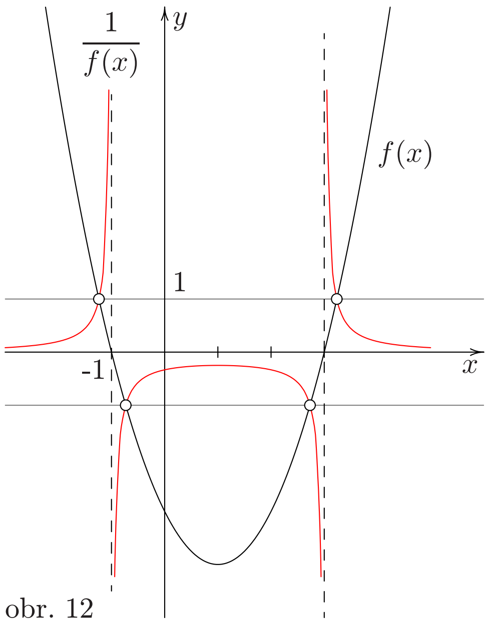
Pro nakreslení grafu této funkce můžeme použít buď graf funkce $y = \frac{1}{x^2}$, který posuneme ve směru osy $x$ o jednu jednotku doprava, nebo můžeme zopakovat výše uvedený postup. Zůstaneme u druhé možnosti. Grafem funkce $y = (x-1)^2$ je parabola s vrcholem $V[1, 0] = P_x$, průsečík s osou $y$ je $P_y[0, 1]$. Graf převrácené funkce má jedinou svislou asymptotu procházející vrcholem paraboly (obr. 13).

c) $y = \dfrac{1}{x^2-2x+\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{f(x)}$

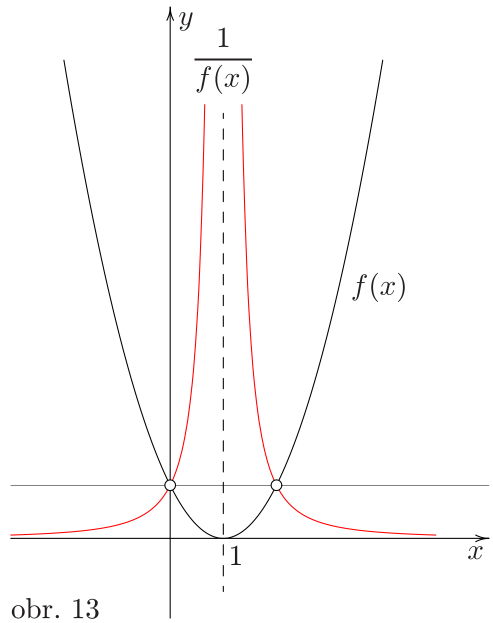
Nakreslíme graf paraboly $y = x^2 - 2x + \frac{5}{4}$, její vrchol má souřadnice $V[1, \frac{1}{4}]$, průsečíky s osou $x$ nejsou (převrácená funkce nebude mít svislé asymptoty), průsečík s osou $y$ je $P_y[0, \frac{5}{4}]$. Z minima $[1, \frac{1}{4}]$ původní funkce se stane maximum $[1, 4]$ převrácené funkce , symetrie podle přímky $x = 1$ se zachovává.

d) $y = \dfrac{1}{x^2-2x+2} = \dfrac{1}{f(x)}$

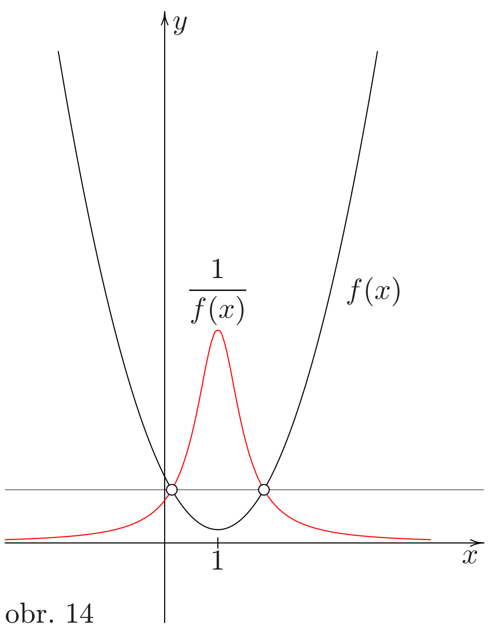
Parabola, která je grafem funkce $y = x^2 - 2x + 2$, má vrchol $V[1, 1]$, osu $x$ neprotíná, průsečík s osou $y$ je $P_y[0, 2]$. Protože obor hodnot funkce $y = x^2 - 2x + 2$ je interval $\langle 1, +\infty)$, bude graf převrácené funkce ležet mezi osou $x$ a přímkou $y = 1$. Oba grafy mají jediný společný bod, a to bod $[1, 1]$.



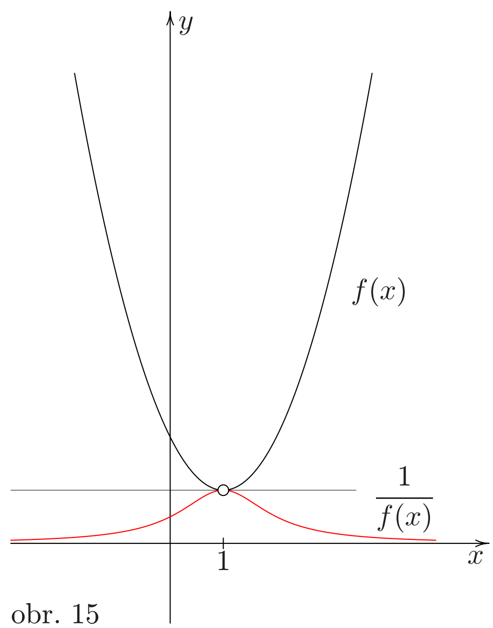

obr. 12




obr. 13




obr. 14




obr. 15

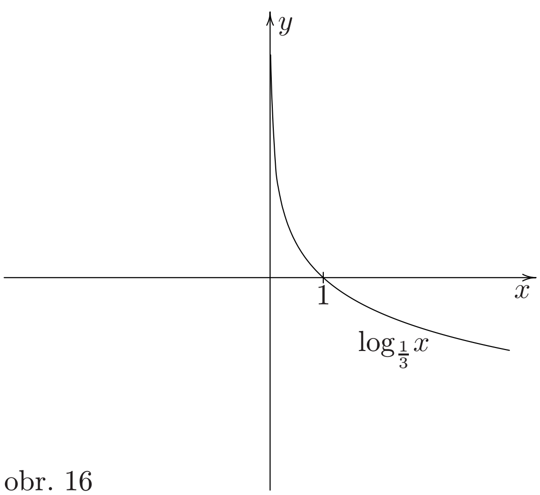
Na závěr příklad na skládání transformací.

### Příklad 2

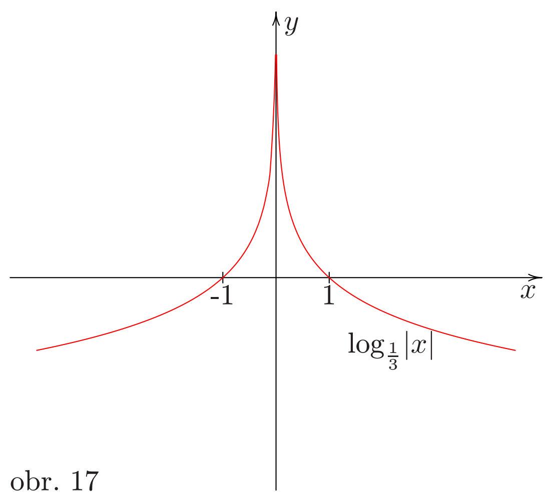
Načrtněte graf funkce $y = |\log_{\frac{1}{3}}|x-2||$

*Řešení:*

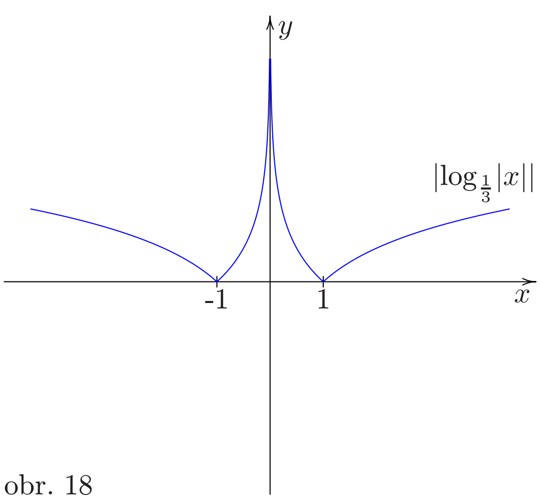
Začneme známým grafem funkce $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Základ logaritmu je menší než 1, takže funkce je klesající. Graf má svislou asymptotu v ose $y$, osu $x$ protíná v $x = 1$ - obr. 16. Absolutní hodnota argumentu změní předchozí funkci na funkci sudou - červená křivka. Absolutní hodnota funkční hodnoty obrací části grafu pod osou $x$ nad osu $x$ - modrá křivka. Výsledný graf získáme posunutím modré křivky o dvě jednotky v kladném směru osy $x$ (posouvá se i svislá asymptota) - zelená křivka.



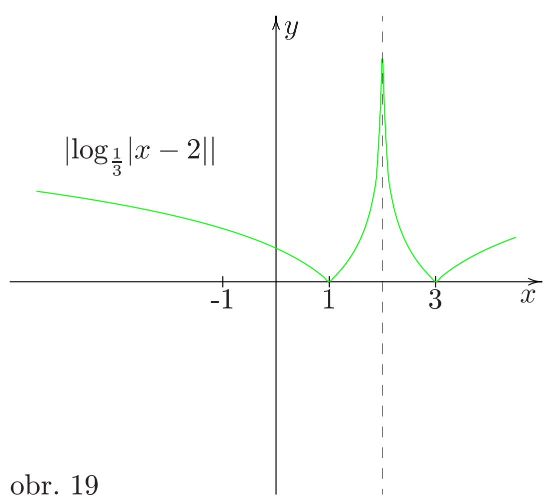
obr. 16



obr. 17



obr. 18



obr. 19