Tečna

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě dotyku $T[x_o,y_o]$; $y_o = f(x_o)$, má rovnici:

$$y - y_o = f'(x_o) \cdot (x - x_o)$$

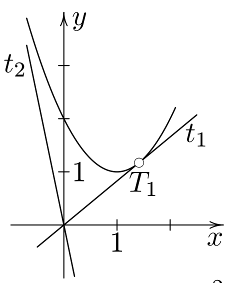
Příklad Nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce $y = x^2 + 3x - 2$ v bodě dotyku $T[1,?]$.

Řešení: Dopočítáme druhou souřadnici bodu dotyku $y_o = f(1) = 2$, a tedy bod dotyku je $T[1, 2]$. Směrnice tečny je číselně rovna derivaci funkce $y_o' = f'(x_o) = 2x + 3|_{x_o=1} = 5$.

A můžeme psát rovnici tečny: $y - 2 = 5(x - 1)$, upraveno $y = 5x - 3$.

Příklad Nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce $y = x^2 - 2x + 2$, procházející počátkem.

Řešení:



Načrtneme obrázek. Tentokrát neznáme bod dotyku, pouze bod, kterým tečny (jsou zřejmě dvě) procházejí. Protože je to počátek, mají tečny rovnici: $y = kx$; $k \in R$.

Směrnice k v bodě dotyku $T[x_o, y_o]$ je $k = f'(x_o) = 2x_o - 2$. Pak z rovnice tečny plyne pro y_o :

$y_o = (2x_o - 2)x_o = 2x_o^2 - 2x_o$. Dosadíme y_o do zadané funkce a vypočteme x_o, čímž získáme vše potřebné pro rovnice tečen.

$$\begin{aligned}
2x_o^2 - 2x_o &= x_o^2 - 2x_o + 2 \\
x_o^2 &= 2 \\
x_o &= \begin{cases} \sqrt{2}, & y_o = 4 - 2\sqrt{2}, \quad t_1 : y = (-2 + 2\sqrt{2})x \\ -\sqrt{2}, & y_o = 4 + 2\sqrt{2}, \quad t_2 : y = (-2 - 2\sqrt{2})x \end{cases}
\end{aligned}$$

Neřešené příklady

1. Nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce $y = 3 \ln x$ v průsečíku grafu s osou x. $[y = 3x-3]$
2. Určete rovnici tečny k exponenciále $y = \mathrm{e}^x$; jestliže tečna prochází počátkem. $[y = \mathrm{e} \cdot x]$
3. Nalezněte rovnici tečny k hyperbole $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, rovnoběžné s přímkou $y = -2x + 11$.
$$\left[\begin{array}{ll} t_1 : y = -2x + 7 & T[2, 3] \\ t_2 : y = -2x - 1 & T[0, -1] \end{array} \right]$$
4. Zjistěte, ve kterých bodech křivky $y = x^3 + x - 2$ je tečna k ní rovnoběžná s přímkou $y = 4x - 1$. $[[1,0], [-1, -4]]$
5. Křivka je dána rovnicí: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. Tečna v kterémkoliv bodě této křivky vytíná na souřadnicových osách úseky, jejichž součet je vždy roven a. Dokažte.
6. Je dána asteroida $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$. Každá tečna této křivky má tu vlastnost, že její délka mezi průsečíky se souřadnicovými osami je vždy rovna a. Dokažte.
7. Nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce $y = \ln (x^2 - 2)$ v bodě $T[2,?]$. $[y - \ln 2 = 2(x-2)]$
8. Napište rovnici normály ke grafu funkce $y = \operatorname{arctg} x$ v bodě $T[0,?]$. $[y = -x]$