

Přehled některých vět a vzorců \mathcal{Z} -transformace

$$F(z) = \mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

	Originál	Obraz funkce $f(t)$	Poznámka
	$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^{\infty})$	
	Limitní věta:	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f_0$	
1	$\{a \cdot f_n + b \cdot g_n\}_{n=0}^{\infty}$	$a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$	Lineárnost, a, b jsou konstanty
2	$\{a^n \cdot f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$	Podobnost obrazů, a je komplexní konstanta
3	$\{e^{an} \cdot f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$F\left(\frac{z}{e^a}\right)$	Násobení vzoru exponenciální funkcí
4	$\{(f * g)_n\}_{n=0}^{\infty}$	$F(z) \cdot G(z)$	Konvoluce vzorů
5	$\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}$	$z^{-k} F(z)$	Posunutí vzoru vpravo
6	$\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$	$z^k \left(F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right)$	Posunutí vzoru vlevo
7	$\{\Delta f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$(z-1)F(z) - f_0 z$	Obraz dopředných diferencí 1. řádu
8	$\{\Delta^k f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$(z-1)^k F(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-i-1} \Delta^i f_0$	Obraz dopředných diferencí k -tého řádu
9	$\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$\frac{z-1}{z} F(z)$	Obraz zpětných diferencí 1. řádu

(pokračování na další stránce)

(pokračování tabulky)

	Originál	Obraz funkce $f(t)$	Poznámka
	$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^{\infty})$	
10	$\{\nabla^k f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$\left(\frac{z-1}{z}\right)^k F(z)$	Obraz zpětných diferencí k -tého řádu
11	$\{nf_n\}_{n=0}^{\infty}$	$-z \frac{dF(z)}{dz}$	Derivace obrazu
12	$\left\{\frac{f_n}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$	$\int_z^{\infty} \frac{F(w)}{w} dw$	Integrace obrazu
13	$\left\{\frac{\partial f_n(w)}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$	$\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}$	Derivace obrazu podle parametru
14	$\left\{\int_a^b f_n(w) dw\right\}_{n=0}^{\infty}$	$\int_a^b F(z, w) dw$	Integrace obrazu podle parametru
15	$\left\{\sum_{n=0}^n f_i\right\}_{n=0}^{\infty}$	$\frac{z}{z-1} F(z)$	Obraz částečných součtů
16	$f_0 = 1, f_n = 0, n > 0$	1	
17	$f_n = 1 \text{ pro } \forall n$	$\frac{z}{z-1}$	
18	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$	
19	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	
20	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	
21	n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	

(pokračování na další stránce)

(pokračování tabulky)

	Originál	Obraz funkce $f(t)$	Poznámka
	$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}\{\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\}$	
22	n^4	$\frac{z(z^3 + 11z^2 + 11z + 1)}{(z - 1)^5}$	
23	$\binom{n}{m}, n \geq m - 1$	$\frac{z}{(z - 1)^{m+1}}$	
24	$(-1)^n \binom{n}{m}, n \geq m - 1$	$\frac{(-1)^m z}{(z - 1)^{m+1}}$	
25	$\binom{n+k}{m}, k \leq m$	$\frac{z^{k+1}}{(z - 1)^{m+1}}$	
26	$\binom{k}{n}, n \leq k$	$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^k$	
26	a^n	$\frac{z}{z - a}$	
28	a^{n+1}	$\frac{za}{z - a}$	
29	a^{n-1}	$\frac{1}{z - a}$	
30	a^{2n}	$\frac{z}{z - a^2}$	
31	$n \cdot a^n$	$\frac{za}{(z - a)^2}$	
32	$n^2 \cdot a^n$	$\frac{za(z + a)}{(z - a)^3}$	
33	$\binom{n}{m} a^n, n \geq m - 1$	$\frac{a^m z}{(z - a)^{m+1}}$	
34	e^{an}	$\frac{z}{z - e^a}$	

(pokračování na další stránce)

(pokračování tabulky)

	Originál	Obraz funkce $f(t)$	Poznámka
	$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}\{\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\}$	
35	$\frac{(-1)^{n-1}}{n}, n \geq 1$	$\ln \frac{z+1}{z}$	
36	$\frac{1^{n-1}}{n}, n \geq 1$	$\ln \frac{z}{z-1}$	
37	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$	
38	$\frac{a^n}{(2n)!}$	$\cosh \sqrt{\frac{a}{z}}$	
39	$\frac{a^n}{(2n+1)!}$	$\sqrt{\frac{a}{z}} \sinh \sqrt{\frac{a}{z}}$	
40	$\frac{(-1)^n}{(2n)!}$	$\cos \frac{1}{\sqrt{z}}$	
41	$\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$	$\sqrt{z} \sin \frac{1}{\sqrt{z}}$	
42	$\sinh \alpha n$	$\frac{z \cdot \sinh \alpha}{z^2 - 2z \cdot \cosh \alpha + 1}$	
43	$\cosh \alpha n$	$\frac{z(z - \cosh \alpha)}{z^2 - 2z \cdot \cosh \alpha + 1}$	
44	$\sinh(\alpha n + \varphi)$	$\frac{z[z \cdot \sinh \varphi + \sinh(\alpha - \varphi)]}{z^2 - 2z \cdot \cosh \alpha + 1}$	
45	$\cosh(\alpha n + \varphi)$	$\frac{z[z \cdot \cosh \varphi - \cosh(\alpha - \varphi)]}{z^2 - 2z \cdot \cosh \alpha + 1}$	
46	$a^n \sinh \alpha n$	$\frac{za \cdot \sinh \alpha}{z^2 - 2za \cdot \cosh \alpha + a^2}$	
47	$a^n \cosh \alpha n$	$\frac{z^2 - za \cdot \cosh \alpha}{z^2 - 2za \cdot \cosh \alpha + a^2}$	

(pokračování na další stránce)

(pokračování tabulky)

	Originál	Obraz funkce $f(t)$	Poznámka
	$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^{\infty})$	
48	$n \sinh \alpha n$	$\frac{z(z^2 - 1) \cdot \sinh \alpha}{(z^2 - 2z \cdot \cosh \alpha + 1)^2}$	
49	$n \cosh \alpha n$	$\frac{z[(z^2 + 1) \cdot \cosh \alpha - 2z]}{(z^2 - 2z \cdot \cosh \alpha + 1)^2}$	
50	$\sin \beta n$	$\frac{z \cdot \sin \beta}{z^2 - 2z \cdot \cos \beta + 1}$	
51	$\cos \beta n$	$\frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cdot \cos \beta + 1}$	
52	$\sin(\beta n + \varphi)$	$\frac{z[z \cdot \sin \varphi + \sin(\beta - \varphi)]}{z^2 - 2z \cdot \cos \beta + 1}$	
53	$\cos(\beta n + \varphi)$	$\frac{z[z \cdot \cos \varphi - \cos(\beta - \varphi)]}{z^2 - 2z \cdot \cos \beta + 1}$	
54	$e^{an} \sin \beta n$	$\frac{ze^a \cdot \sin \beta}{z^2 - 2ze^a \cdot \cos \beta + e^{2a}}$	
55	$e^{an} \cos \beta n$	$\frac{z(z - e^a \cdot \cos \beta)}{z^2 - 2ze^a \cdot \cos \beta + e^{2a}}$	
56	$a^n \sin(\beta n + \varphi)$	$\frac{z[z \cdot \sin \varphi + a \cdot \sin(\beta - \varphi)]}{z^2 - 2za \cdot \cos \beta + a^2}$	
57	$a^n \cos(\beta n + \varphi)$	$\frac{z[z \cdot \cos \varphi - a \cdot \cos(\beta - \varphi)]}{z^2 - 2za \cdot \cos \beta + a^2}$	
58	$n \sin \beta n$	$\frac{z(z^2 - 1) \cdot \sin \beta}{(z^2 - 2z \cdot \cos \beta + 1)^2}$	
59	$n \cos \beta n$	$\frac{z[(z^2 + 1) \cdot \cos \beta - 2z]}{(z^2 - 2z \cdot \cos \beta + 1)^2}$	

Konec tabulky