Soustavy lineárních algebraických rovnic SLAR

Helena Říhová

FBMI

12. listopadu 2010

Obsah

Definice SLAR

Definice

▶ Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n) $\boldsymbol{x}$ je jednosloupcová matice typu $(n, 1)$, a $\boldsymbol{b}$ je jednosloupcová matice typu $(m, 1)$. Pak maticovou rovnost

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

nazýváme soustavou m lineárních rovnic o n neznámých.
$\mathbf{A}$ je matice soustavy,
$\boldsymbol{b}^T$ je sloupec pravých stran,
$(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$ typu $(m, n+1)$ je rozšířená matice soustavy. ◀

Definice SLAR

Definice

- Řešením soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je takový vektor $\boldsymbol{x} = \alpha$, pro který platí:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Frobeniova věta

Věta (Frobeniova) ▶ Soustava $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení právě tehdy, když

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$$

◀

Definice

▶ Máme soustavy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \quad - \quad m \text{ rovnic o } n \text{ neznámých a} \\ \mathbf{C}\,\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{d} \quad - \quad k \text{ rovnic o } n \text{ neznámých} \end{aligned}$$

Řekneme, že soustavy jsou ekvivalentní, mají-li stejnou množinu řešení. ◀

Poznámka: Gaussova eliminace převádí danou soustavu na soustavu s ní ekvivalentní.

(Ne)homogenní soustavy

Věta ▶ Ke každé soustavě $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lze najít ekvivalentní soustavu $\mathbf{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, kde $\mathbf{C}$ je horní trojúhelníková matice.
(Hledá se pomocí GE.) ◀

Definice

▶ Existuje-li ve vektoru pravých stran $\boldsymbol{b}$ alespoň jeden prvek nenulový, nazýváme soustavu $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nehomogenní, soustava $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ je homogenní. ◀

Věta ▶ Množina všech řešení homogenní soustavy o n neznámých $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbf{R}^n$. ◀

Důsledek

Musí existovat LNZ vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, kde $k = n - \mathrm{h}(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}\,\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{o}$ pro $i = 1, \ldots, k$ a libovolné řešení $\boldsymbol{u}$, $\mathbf{A}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} k_i\, \boldsymbol{u}_i, \quad k_i \in \mathbf{R}.$$

$\boldsymbol{u}$ se nazývá obecné řešení homogenní soustavy, vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ tvoří bázi prostoru řešení.

Homogenní soustavy

Věta ▶ Nechť M_o je lineární prostor všech řešení soustavy o n neznámých $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Pak $\dim M_o = n - \mathrm{h}(\mathbf{A})$. ◀

Důsledek

Je-li $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = n$, soustava má pouze triviální řešení.
Je-li $\mathrm{h}(\mathbf{A}) < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení.

Definice

▶ Nechť $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$. je nehomogenní SLAR o n neznámých a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ je nějaké konkrétní řešení. Pak ho nazýváme partikulární řešení nehomogenní soustavy. Soustava $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. je přidružená homogenní soustava k soustavě $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. ◀

Nehomogenní soustavy

Věta ▶

1) Nechť $\boldsymbol{v}$ je partikulární řešení nehomogenní soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{u}$ je libovolné řešení $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Potom $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ řeší $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

2) Nechť $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ jsou partikulární řešení $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, pak $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ je řešení $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. ◀

Věta ▶ Nechť $\boldsymbol{x}_p$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a M_o je LP všech řešení soustavy přidružené $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Pak množina všech řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je $M = \{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h,\ \boldsymbol{x}_h \in M_o\}$. Tj. obecné řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h,$$

kde

$\boldsymbol{x}_p$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,

$\boldsymbol{x}_h$ je obecné řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. ◀

Cramerovo pravidlo pro čtvercovou soustavu $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Je-li $\det\mathbf{A} \neq 0$, pak má soustava jediné řešení. Pro $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, pro $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ je $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$.

Cramerovo pravidlo

Máme-li soustavu $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, s regulární čtvercovou maticí $\mathbf{A}$ ($\det\mathbf{A} \neq 0$), pak má soustava jediné řešení $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, kde

$x_i = \dfrac{\det \mathbf{B}_i}{\det\mathbf{A}}$, přičemž matice $\mathbf{B}_i$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce a_{*i} sloupcem pravých stran $\boldsymbol{b}$.

Příklad: ► Cramerovým pravidlem vyřešte soustavu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Řešení: $\det \mathbf{A} = -2,$

$$\det \mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 11 & 4 & 5 \\ 12 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 18, \quad \det \mathbf{B}_2 = -19, \quad \det \mathbf{B}_3 = 0.$$

Soustava má jediné řešení $\boldsymbol{x} = (-9,\ 19/2,\ 0)$ ◄