Řady

Helena Říhová

FBMI

23. listopadu 2010

Definice číselné řady

Definice

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných nebo komplexních čísel, pak výraz

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazýváme číselná řada, $a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jsou členy řady (první, druhý, ... n-tý člen).

Součet prvních n členů řady

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

se nazývá n-tý částečný součet řady,

Definice číselné řady - pokračování

Posloupnost

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$$

je posloupnost částečných součtů řady.

Součet

$$R_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$$

se nazývá zbytek po n-tém členu.

Součet řady

Jestliže existuje vlastní

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

pak se řada nazývá konvergentní a s je součet řady. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

V opačném případě, kdy limita posloupnosti částečných součtů je nekonečná, nebo neexistuje, je řada divergentní.

Příklad: Určete součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$.

Řešení:
Jde o geometrickou řadu s kvocientem $q = \dfrac{1}{2}$.

Součet prvních n členů řady je $\quad s_n = \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$,

součet řady $s = \displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2.$

Příklad: Zjistěte konvergenci řady a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Řešení:

a) Součet prvních n členů řady je $s_n = \frac{1}{2}(1+2+\ldots+n) = \frac{(n+1)\,n}{4}$,

$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad$ řada diverguje.

b) Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = 1,\ 0,\ 1,\ 0, \ldots$ osciluje,

tedy nemá limitu $\quad \Rightarrow \quad$ řada diverguje.

Geometrická řada

Geometrická řada s kvocientem q je řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1} = a + a\,q + a\,q^2 + \dots$$

n-tý částečný součet $s_n = \dfrac{a\,(1-q^n)}{1-q}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q}(1-q^n) = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} = s & \text{pro } |q| < 1, \quad \text{řada konverguje,} \\ \pm\infty & \text{pro } q \geq 1, \quad \text{řada diverguje,} \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1, \quad \text{řada diverguje.} \end{cases}$$

konvergence řad

Nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Jestliže konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, říkáme, že řada konverguje absolutně,

Jestliže konverguje pouze $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, řada konverguje neabsolutně.

Věta:

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, je rovněž konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Opak není pravdou.

konvergence řad

Příklad:

a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ konverguje absolutně, neboť konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Obě řady jsou geometrické s kvocienty $q=-\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$.

b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje pouze neabsolutně, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, která se nazývá harmonická, diverguje.

Kritéria konvergence pro řady s kladnými členy

1) Porovnávací

Předpokládáme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy

a $\exists n_o \in N_o$, že pro $\forall\, n > n_o$ a nějaké $c > 0$ platí $\quad a_n \leq c\, b_n$,
potom:

$$\text{je} - \text{li} \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{konvergentní}, \quad \text{pak i} \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{je konvergentní},$$

$$\text{je} - \text{li} \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{divergentní}, \quad \text{pak i} \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{je divergentní}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá minoranta, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majoranta.

Kritéria konvergence pro řady s kladnými členy

2) Limitní podílové

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Potom:

Je-li $q < 1$, řada konverguje,

Je-li $q > 1$, řada diverguje,

Je-li $q = 1$, nelze rozhodnout.

3) Limitní odmocninové

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

Potom:

Je-li $q < 1$, řada konverguje,

Je-li $q > 1$, řada diverguje,

Je-li $q = 1$, nelze rozhodnout.

- Příklad: Zjistěte konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$
- *Řešení*: Použijeme limitní podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad$ řada konverguje.

- Příklad: Zjistěte konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$
- *Řešení*: Použijeme limitní podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad$ řada konverguje.

Příklad: Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ konverguje a odhaněte chybu aproximace součtu řady částečným součtem s_{10}.

Řešení: Použijeme opět limitní podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ řada konverguje.

Pokračování příkladu

Chyba aproximace je dána zbytkem R_{11}.

$$R_{11} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} < \frac{1}{11} \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{11} \sum_{n=11}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left[\begin{array}{l} \text{máme geome–} \\ \text{trickou řadu} \\ \text{s kvocientem } 1/2 \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{11} \frac{\frac{1}{2^{11}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{11 \cdot 2^{10}} \doteq 0.000089$$

$s_{10} = 0.693065 \quad \Rightarrow \quad$ Součet řady $s \doteq 0.693065 \pm 0.00009$, tj. $s \doteq 0.693$

Chyba přiblížení součtu řady částečným součtem je menší než 0,02%.

Leibnizovo kritérium pro alternující řadu

Leibnizovo kritérium

Mějme alternující řadu (se střídavými znaménky)

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n; \quad a_n > 0 \text{ pro } \forall\, n.$$

Potom, je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

řada konverguje.

Tj. pro alternující řadu je podmínka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nutná i postačující.

Příklad: Leibnizova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konverguje, nebot' $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$,

zatímco harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje, což se dokáže integrálním kritériem, ale na to zatím nemáme aparát.

Definice funkční řady

Funkční řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

definiční obor řady:

$$J = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i,$$

kde D_i jsou definiční obory členů řady.

Součet řady

n-tý částečný součet řady:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

součet řady:

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),$$

zbytek řady po n-tém členu:

$$R_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x).$$

Konvergence řady

Jestliže číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o),\ x_o \in J$ konverguje, říkáme, že funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje v bodě x_o.

Množina $I \subset J$ taková, že pro $\forall x \in I$ je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentní, se nazývá obor konvergence řady.

- Příklad: Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$.
- *Řešení*: Použijeme limitní podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\sin^{n+1} x}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{\sin^n x}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin x| n^2}{(n+1)^2} = |\sin x|$$

- $$|\sin x| < 1 \text{ pro } x \in \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right), \; k \in \mathbf{Z},$$

  pro tato x řada konverguje absolutně.

- Příklad: Určete obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$.
- *Řešení*: Použijeme limitní podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{\sin^{n+1} x}{(n+1)^2}\right|}{\left|\dfrac{\sin^n x}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin x| n^2}{(n+1)^2} = |\sin x|$$

- $$|\sin x| < 1 \text{ pro } x \in \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right), \ k \in \mathbf{Z},$$

  pro tato x řada konverguje absolutně.

- Příklad: Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$.
- *Řešení*: Použijeme limitní podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\sin^{n+1} x}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{\sin^n x}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin x| n^2}{(n+1)^2} = |\sin x|$$

- $$|\sin x| < 1 \text{ pro } x \in \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right), \; k \in \mathbf{Z},$$

  pro tato x řada konverguje absolutně.

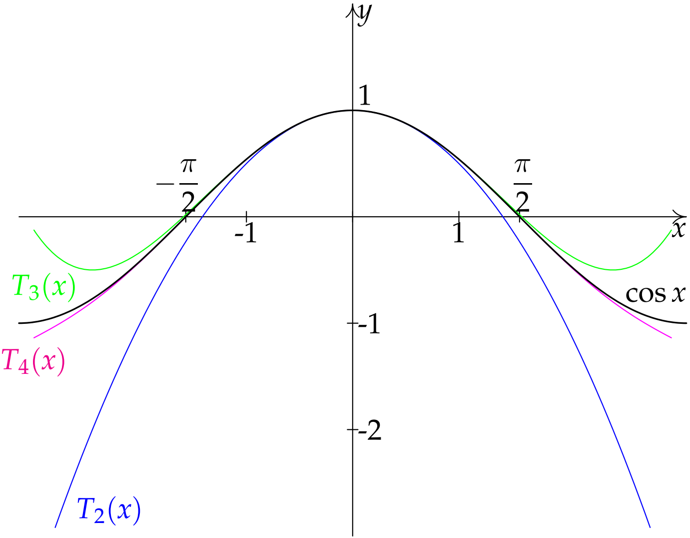
pokračování příkladu

- $$\text{Pro } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2} \text{ přejde na } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$
  $$\text{pro } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ na } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$
  Obě řady konvergují absolutně.
- Závěr: Obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$ je $\mathbf{R}$, řada konverguje absolutně v $\mathbf{R}$.

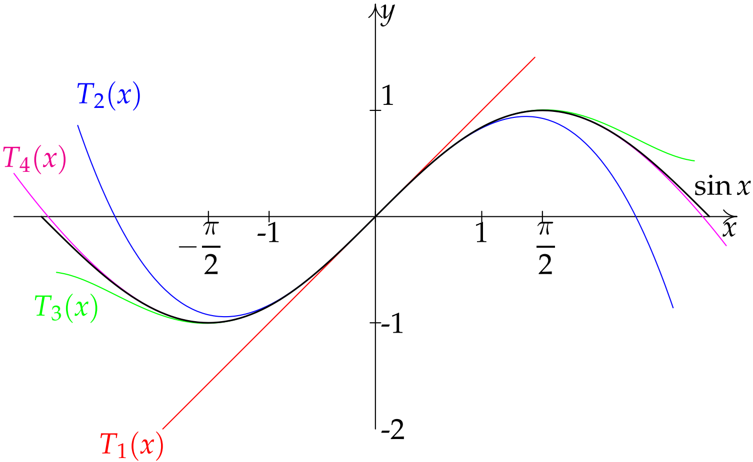
pokračování příkladu

- $$\text{Pro } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2} \text{ přejde na } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$
  $$\text{pro } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ na } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$
  Obě řady konvergují absolutně.
- Závěr: Obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$ je $\mathbf{R}$, řada konverguje absolutně v $\mathbf{R}$.

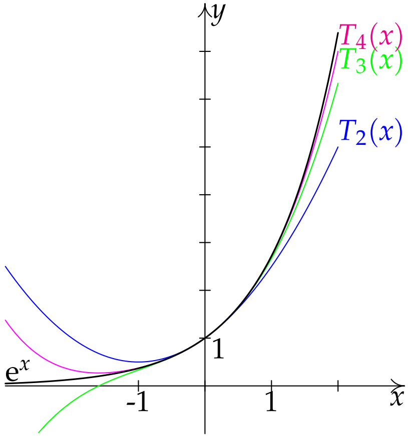
Taylorovy polynomy pro funkci $\cos x$



Taylorovy polynomy pro funkci $\sin x$



Taylorovy polynomy pro funkci e^x



Děkuji za pozornost