

Průběh funkce

Příklad 1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = 3x^4 + 20x^3 + 36x^2$.

Řešení: $D_f = \mathbf{R}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, \Rightarrow asymptoty nejsou.

Z první derivace zjistíme stacionární body:

$$f'(x) = 12x^3 + 60x^2 + 72x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow \text{funkce má tři stacionární body: } x_1 = -3; x_2 = -2; x_3 = 0.$$

O jaké extrémy jde, poznáme buď ze znaménka druhé derivace, nebo z limit v nekonečnu a spojitosti funkce.

$$f''(x) = 36x^2 + 120x + 72$$

1. $f''(-3) = 36 \Rightarrow x_1 = -3$ je bod *lokálního minima*, $f_{\min}(-3) = 27$.
2. $f''(-2) = -24 \Rightarrow x_2 = -2$ je bod *lokálního maxima*, $f_{\max}(-2) = 32$.
3. $f''(0) = 72 \Rightarrow x_3 = 0$ je bod *lokálního minima*, $f_{\min}(0) = 0$.

Inflexní body leží v intervalech $(-3; -2)$ a $(-2; 0)$ a vypočítají se z rovnice $f''(x) = 0$. Graf je na obrázku 1.

Příklad 2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^2 - x|x+1|}{x-2}$.

Řešení: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + x}{x-2}, & x \in (-\infty; -1), \\ \frac{-x}{x-2}, & x \in (-1; \infty) \setminus \{2\}. \end{cases}$$

Zjistíme asymptoty.

1. $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{-x}{x-2} = \frac{-2}{0^\pm} = \mp\infty \Rightarrow$ svislá asymptota $x = 2$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x-2} = -1 \Rightarrow$ vodorovná asymptota $y = -1$ v $+\infty$.
Pro velká kladná x platí $\frac{-x}{x-2} < -1 \Rightarrow$ funkce se blíží k asymptotě zdola.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x}{x-2} = -\infty \Rightarrow$ může být šikmá asymptota.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^2 + x}{x-2}}{x} = 2 = k \text{ je směrnice šikmé asymptoty.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x}{x - 2} - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 2x^2 + 4x}{x - 2} = 5 = q$$

Šikmá asymptota je $y = 2x + 5$.

Průsečíky grafu s šikmou asymptotou.

$$\frac{2x^2 + x}{x - 2} = 2x + 5 \quad | \cdot (x - 2)$$

$2x^2 + x = 2x^2 + x - 10 \Rightarrow$ průsečíky nejsou, graf funkce se blíží k asymptotě zdola.

Průsečíky grafu f s osami:

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow P_x[0; 0]$, jiné nejsou.

Zjistíme stacionární body.

$$1. \quad x \in (-\infty; -1) \quad f'(x) = \frac{(4x + 1)(x - 2) - (2x^2 + x)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 8x - 2}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 \doteq 2,12; \quad x_2 \doteq -0,23.$$

Kořeny nevyhovují, neboť nepatří do intervalu $(-\infty; -1)$.

\Rightarrow pro $x \leq -1$ je $f'(x) > 0$ a funkce je rostoucí.

$$2. \quad x \in \langle -1; \infty \rangle \setminus \{2\} \quad f'(x) = \frac{-(x - 2) + 3}{(x - 2)^2} = \frac{2}{(x - 2)^2} > 0 \Rightarrow \text{funkce je rostoucí.}$$

Inflexní bod (funkce se mění z konkávní na konvexní) je v bodě $x = -1$. Graf je na obr. 2.

Neřešené příklady

Určete průběh funkce, nakreslete graf.

- 1) $f(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + x}$ 2) $f(x) = \frac{x^3}{6x - 12}$ 3) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
 4) $f(x) = (\arctan x)^2$ 5) $f(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^2}$ 6) $f(x) = \ln[(x - 2)^2 + 1]$
 7) $f(x) = \tan x + \cot x; \quad x \in (-\pi; \pi)$ 8) $f(x) = \cos x - \ln(\cos x); \quad x \in (-\pi; \pi)$

Výsledky:

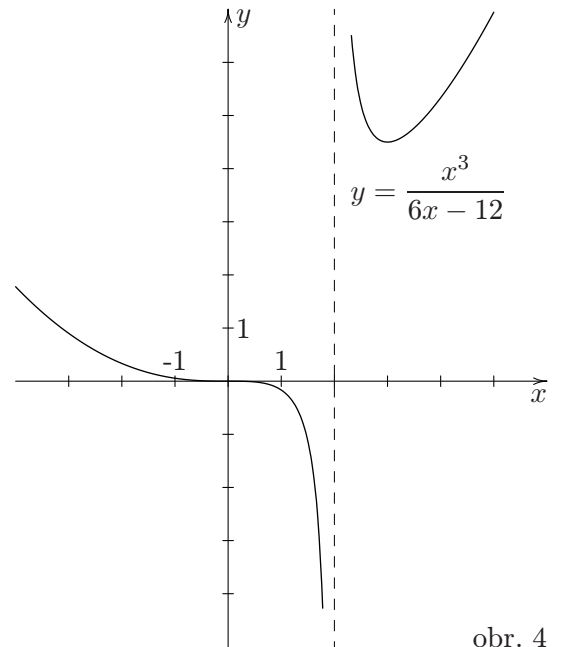
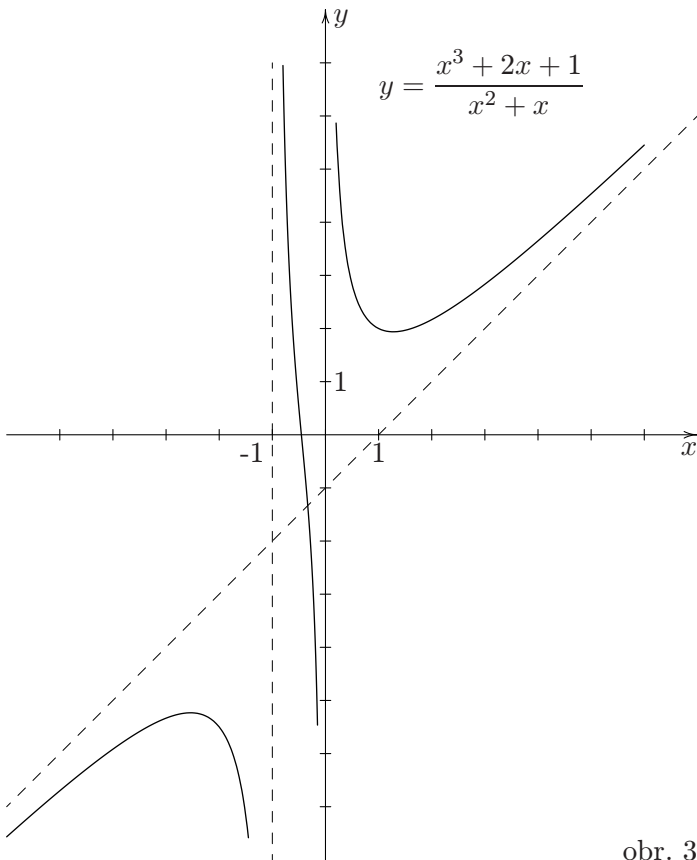
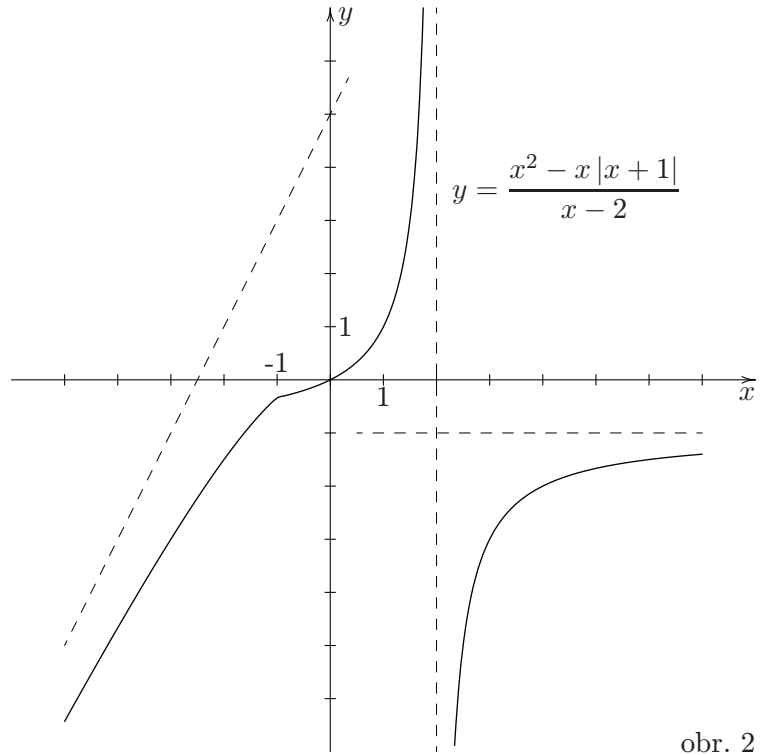
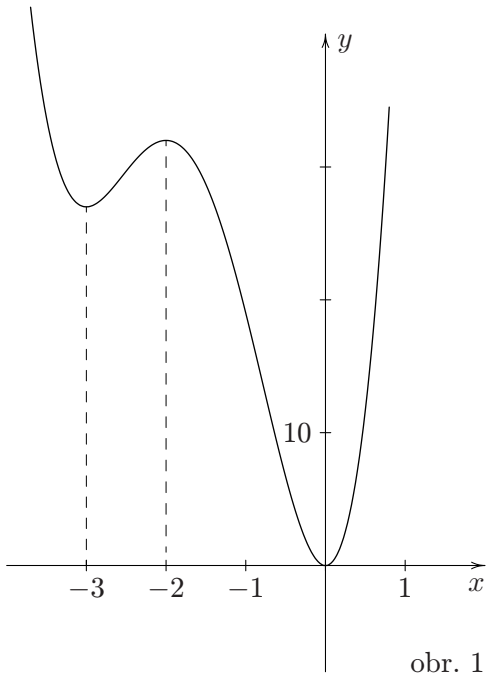
1) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$. Svislé asymptoty: $x = -1$, zprava funkční hodnoty rostou (ale funkce je klesající!), zleva klesají, $x = 0$, zprava funkční hodnoty rostou, zleva klesají. Šikmá asymptota $y = x - 1$, v $+\infty$ se funkce blíží shora, v $-\infty$ zdola, jedno lokální minimum na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$, jedno lokální maximum na intervalu $\langle -3, -1 \rangle$, na přesné určení polohy extrémů zatím není aparát. Graf je na obrázku 3.

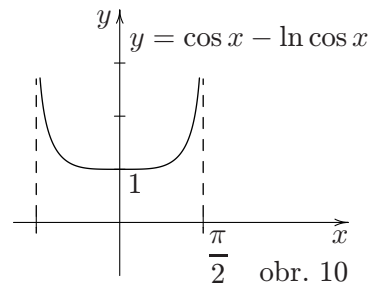
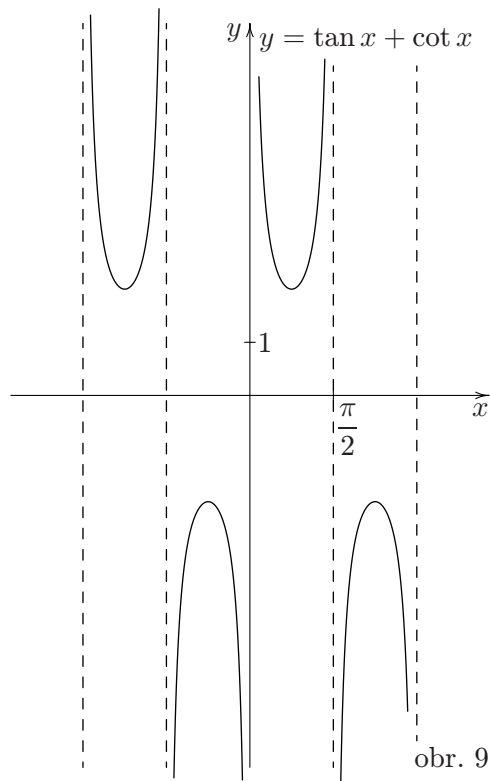
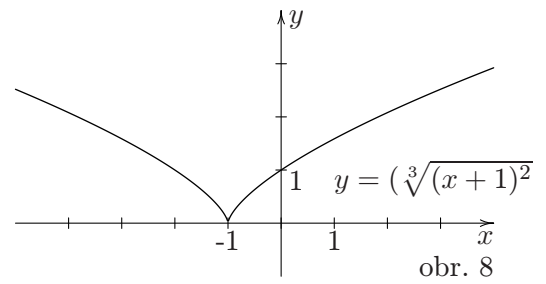
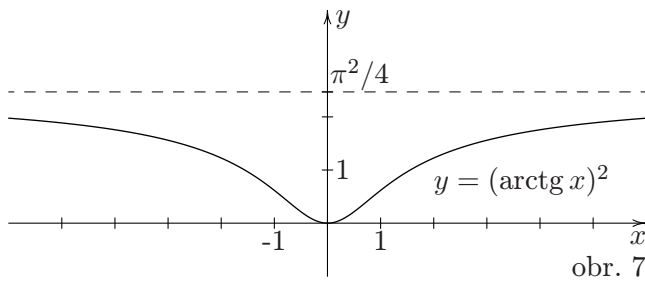
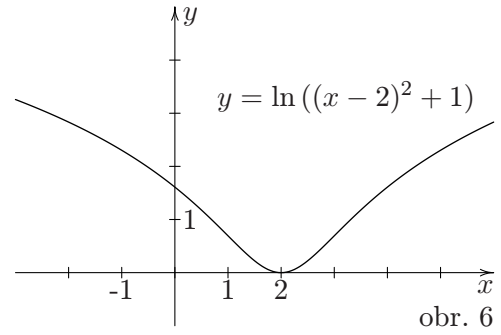
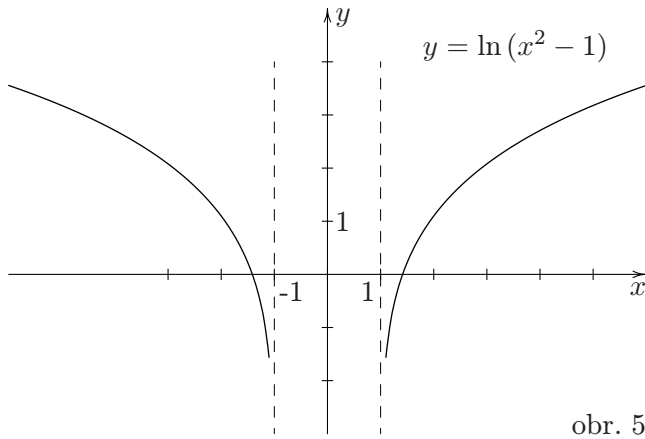
2) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$. Svislá asymptota $x = 2$, zprava funkční hodnoty rostou, zleva klesají, stacionární body $x = 0, x = 3$, lokální minimum $f_{\min}(3) = 4,5$, graf je na obrázku 4.

3) $D_f = \mathbf{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$. Funkce je sudá, graf je symetrický podle osy y . Svislé asymptoty $x = -1, x = 1$, lokální extrémy nejsou, graf je na obrázku 5.

4) - 8) grafy jsou na obrázcích 6 - 10.

$$y = 3x^4 + 20x^3 + 36x^2$$





Funkce je definována pouze na $(-\pi/2, \pi/2)$.