

Příklady k procvičení ke zkoušce

1) Určete všechny hodnoty parametrů a, b , pro které má soustava jednoparametrická řešení. Spočtete tato řešení.

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= -6 \\ 2x + 5y - z &= b \\ 7x - ay + 7z &= -23 \end{aligned}$$

2) Určete všechny hodnoty parametrů a, b , pro které má soustava dvouparametrická řešení, řešení spočtete.

$$\begin{aligned} 3x - y + bz + u &= 0 \\ x + 2y - z + 3u &= -1 \\ -x + 5y - 4z + au &= -2 \end{aligned}$$

3) Vyřešte maticovou rovnici s neznámou maticí \mathbf{X} .

$$\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{CX}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Nalezněte nejmenší a největší hodnotu funkce $y = x^2 e^{-x}$ na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$.

5) Určete, kdy je funkce $y = x^2 e^{-x}$ konkávní a kdy je konvexní, nalezněte inflexní body.

6) Zjistěte lokální extrémy funkce $y = x^2 e^{-x}$, načrtněte graf.

7) Určete intervaly monotónie a lokální extrémy funkce $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

8) Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce $y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{2x + 1}$.

9) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

10) Strana pravidelného čtyřbokého jehlanu roste rychlostí 2 cm s^{-1} , výška klesá tak, že objem zůstává 96 cm^3 . Jakou rychlostí klesá výška v okamžiku, kdy hrana podstavy je 6 cm .

Výsledky

1) $a = 8, b = 5$, řešení $\mathbf{x} = \left(-\frac{25}{17}, \frac{27}{17}, 0\right) + z \left(-\frac{9}{17}, \frac{7}{17}, 1\right)$, $z \in \mathbf{R}$.

2) $a = 5, b = 2$, řešení $\mathbf{x} = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, 0, 0\right) + z(-3, 5, 7, 0) + u(-5, -8, 0, 7)$, $z, u \in \mathbf{R}$.

3) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4) $y_{\min}(0) = 0, y_{\max}(-2) = 4e^2 \doteq 29.56$

5) Na intervalech $(-\infty, x_1), (x_2, \infty)$ je konvexní, na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ je konkávní. Inflexní body jsou $x_1 = 2 - \sqrt{2}, x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

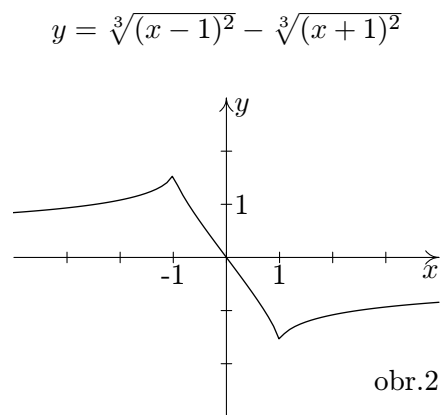
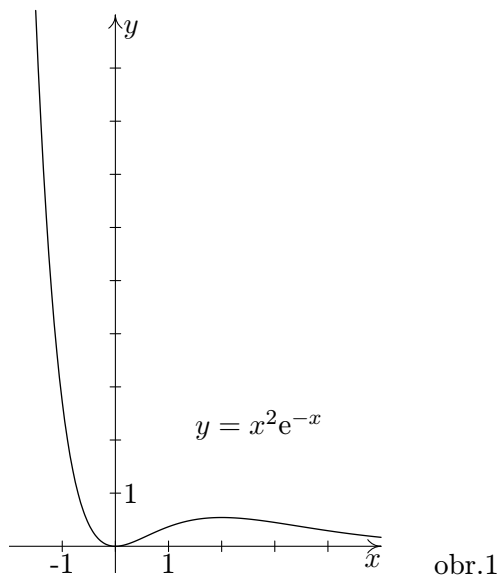
6) l_{\min} je $y(0) = 0$, l_{\max} je $y(2) = 4e^{-2}$, graf je na obrázku 1.

7) Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, klesá na intervalu $(-1, 1)$. l_{\min} je $y(1) = -\sqrt[3]{4} \doteq -1.587$, l_{\max} je $y(-1) = \sqrt[3]{4} \doteq 1.587$. Graf je na obrázku 2.

8) Svislá asymptota $x = -\frac{1}{2}$, šikmá asymptota $y = x - 2$, graf je na obrázku 3.

9) Vlastní čísla a vlastní vektory jsou: $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x}_1 = (-1, 1)$, $\lambda_2 = 7$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1)$.

10) Výška klesá rychlostí $16/3 \text{ cm s}^{-1}$.



$$y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{2x + 1}$$

