Příklady k procvičení 1. várka

I. Určete definiční obor funkce $f(x,y)$, načrtněte obrázek.

1) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$

2) $f(x,y) = \arccos(x-y)$

3) $f(x,y) = \sqrt{3y^2 - 6x}$

4) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4y^2 + 1}$

5) $f(x,y) = \dfrac{2x^2 + y}{\ln(xy)}$

6) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\sqrt{2x - y}}$

Výsledky(bez záruky)

1) Definiční obor je část roviny mezi přímkami: $y = 1 - x,\ y = -1 - x$ včetně hranice.
2) Definiční obor je část roviny mezi přímkami: $y = 1 + x,\ y = -1 + x$ včetně hranice.
3) Definiční obor je vnějšek paraboly $x = y^2/2$ včetně hranice.
4) Definiční obor je část roviny (obsahující počátek) mezi větvemi hyperboly $x^2 - 4y^2 = -1$ včetně hranice.
5) Definiční obor je 1. a 3. kvadrant s vyloučením osy x, osy y a hyperboly $y = 1/x$.
6) Definiční obor je průnik poloroviny ohraničené přímkou $y = 2x$ a obsahující bod [2,0] a vnějšku kružnice se středem v počátku a poloměrem 1. Přímka do def. oboru nepatří, kružnice ano.

II. Nalezněte rovnici tečné roviny τ a normály n (nepovinné) ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě T.

1) $f(x,y) = \sqrt{x + y^2},\ T = [5, 2, ?]$

2) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x,\ T = [1, 0, ?]$

3) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2),\ T = [2, 1, ?]$

4) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy+3y},\ T = [2, 0, ?]$

Výsledky (bez záruky)

1) $\tau:\ x + 4y - 6z + 5 = 0,\quad n:\ \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{-6}$

2) $\tau:\ 5x + y - z - 3 = 0,\quad n:\ \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$

3) $\tau:\ 4x + 2y - 5z - 10 + 5\ln 5 = 0,\quad n:\ \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-\ln 5}{-5}$

4) $\tau:\ 5y - z + 1 = 0,\quad n:\ x = 2,\ \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{-1}$

III. Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí.

1) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y$

2) $f(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y$

3) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

4) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

5) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

Výsledky (bez záruky)

1) Funkce má lokální minimum v bodě $\left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

2) Funkce má lokální maximum v bodě $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$.

3) Funkce má lokální minimum v bodě [0,0] a lokální maximum v bodě $\left[-\frac{5}{3}, 0\right]$.

4) Funkce má lokální minimum v bodě [-2,0].

5) Funkce má lokální minimum v bodě [0,0] a neostré lokální maximum na kružnici $x^2+y^2 = 1$.

Prosím o upozornění na chyby nebo jiné nesrovnalosti.