Posloupnosti

Helena Říhová

FBMI

5. října 2012

Obsah

1. Posloupnosti
   - Definice, vlastnosti
   - Vybraná, stacionární, oscilující, ohraničená posloupnost
   - Monotónní posloupnost
   - Limita posloupnosti
   - Pravidla pro počítání limit
   - Věty o limitách
   - Geometrická posloupnost
   - Eulerovo číslo

Definice posloupnosti

Definice ▶ Nekonečná posloupnost reálných čísel je funkce

$$f:\ \mathbf{N} \to \mathbf{R}.$$

Tj. definiční obor posloupnosti je množina přirozených čísel. ◀

Funkční hodnoty $f(n)$ se obvykle značí a_n a celá posloupnost se zapisuje

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

kde a_1 je první , a_2 druhý, . . . , a_n n-tý člen posloupnosti.

Zadání posloupnosti

Zadání:

a) explicitně, např. $a_n = 3n - 5$,

b) rekurentně, např. $a_{n+1} = 2a_n - 7,\ a_1 = 4,\ n \in \mathbf{N}$.

Příklad: ▶

Aritmetická posloupnost

$a_n = a + (n-1)\,d, \quad a,\ d \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N},$ explicitní zadání.

$a_n = a_{n-1} + d,\ \ a_1 = a, \quad a,\ d \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N},\ n > 1$ rekurentní zadání.

Geometrická posloupnost

$a_n = a\,q^{n-1} \quad a,\ q \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N},$ explicitní zadání.

$a_n = q\,a_{n-1},\ \ a_1 = a \quad a,\ q \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N},\ n > 1$ rekurentní zadání. ◀

Ohraničená posloupnost

Vybereme-li (zachovávajíce pořadí) nekonečně mnoho členů z dané posloupnosti, získáme vybranou posloupnost. Každá posloupnost má nekonečně mnoho vybraných.

Posloupnost $\{a_n\},\ a_n = c$ pro $\forall\, n$, se nazývá stacionární.

Posloupnost, jejíž členy střídají znaménko, se nazývá oscilující.

Definice

- Posloupnost je

ohraničená, jestliže $\exists\, k > 0$, že $|a_n| \leq k$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$,

ohraničená zdola, jestliže $\exists\, k \in \mathbf{R}$, že $k \leq a_n$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$,

ohraničená shora, jestliže $\exists\, k \in \mathbf{R}$, že $a_n \leq k$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$,

Je-li posloupnost ohraničená shora i zdola, je ohraničená.

Monotónní posloupnost

Definice

- Posloupnost je

$$\left.\begin{array}{lr} \text{rostoucí, jestliže pro } \forall\, r,\ s \in \mathbf{N},\ r < s, \text{ je} & a_r < a_s. \\ \text{klesající,} & a_r > a_s. \\ \text{nerostoucí,} & a_r \geq a_s. \\ \text{neklesající,} & a_r \leq a_s. \end{array}\right\} \text{monotónní}$$

Věta ▶ Poloupnost je rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro $\forall n \in \mathbf{N}$. Podobně pro klesající, nerostoucí, neklesající posloupnost.

Vlastní limita posloupnosti

Definice

► Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu L, jestliže ke $\forall\, \varepsilon > 0$

$\exists\, n_0 \in N$ takové, že pro $\forall\, n > n_o$ je $|a_n - L| < \varepsilon$.
Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. Posloupnost, která má vlastní limitu se nazývá konvergentní, jinak je divergentní. ◄

Věta ► Má-li posloupnost limitu L, pak i každá vybraná posloupnost má limitu L.

Jestliže 2 vybrané posloupnosti mají různé limity, pak původní posloupnost limitu nemá. ◄

Věta ▶ Má-li posloupnost vlastní limitu, je ohraničená. Opak není pravdou - viz posloupnost $\{(-1)^n\}$. ◀

Tj. ohraničená posloupnost nemusí mít limitu, ale může, zatímco neohraničená posloupnost vlastní limitu určitě nemá.

Příklad: ▶ Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Řešení: Volíme $\varepsilon > 0$ a hledáme $n_o(\varepsilon)$ tak, aby $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ pro $n > n_o$.

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n} - 0\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n \quad \Rightarrow \quad n_o = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \end{aligned}$$

Hranaté závorky značí *celou část*. ◀

Posloupnost $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ se nazývá harmonická.

Nevlastní limita posloupnosti

Definice ► Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty, \end{matrix}$

jestliže ke $\begin{matrix} \forall\, k > 0 \\ \forall\, k < 0 \end{matrix}$ $\exists\, n_0 \in N$ takové, že pro $\forall\, n > n_o$ je $\begin{matrix} a_n > k \\ a_n < k. \end{matrix}$

Píšeme
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$
◄

Věty o záměně limity a aritmetické operace

Věta ▶ Předpokládáme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \quad a, \ b, \ c \in \mathbf{R}$.
Potom platí:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\, b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}, \quad \text{pro } b_n \neq 0, \ b \neq 0$ ◀

Poznámka: Protože limita posloupnosti se týká vždy n kvapícího do ∞, v zápisu limity se často $n \to \infty$ pod "lim" vynechává. I my tak budeme činit. Rovněž znaménko "+" u $+\infty$ se často nepíše.

Počítání s nekonečny

Věta ▶

1) Nechť $\lim a_n = \infty$, $\{b_n\}$ je ohraničená,
pak $\lim (a_n + b_n) = \infty$ stručně: $\infty + k = \infty$

2) Nechť
$\lim a_n = \infty$, $c > 0$, pak $\lim c\, a_n = +\infty$, $c \cdot \infty = +\infty$ pro $c > 0$
$c < 0$, pak $\lim c\, a_n = -\infty$, $c \cdot \infty = -\infty$ pro $c < 0$.

3) Nechť $\lim a_n = \infty$, pak $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$ $\qquad \dfrac{1}{\infty} = 0$

4) Nechť $\lim a_n = 0$ a $a_n > 0$ pro $\forall n \Rightarrow \lim \dfrac{1}{a_n} = +\infty$ $\qquad \dfrac{1}{0^\pm} = \pm\infty$
$a_n < 0$ pro $\forall n \Rightarrow \lim \dfrac{1}{a_n} = -\infty$

Počítání s nekonečny - pokračování

5) Nechť $\lim a_n = 0,\ \{b_n\}$ je ohraničená, pak $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.

6) Nechť

$$\lim a_n = +\infty,\ \lim b_n = +\infty, \text{ pak } \begin{array}{ll} \lim\,(a_n + b_n) = +\infty & \infty + \infty = \infty \\ \lim\,(a_n \cdot b_n) = +\infty & \infty \cdot \infty = \infty \end{array}$$

Pokud nám při počítání limit vychází:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0 \cdot \infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0},\ \infty - \infty,$$

jde o tzv. neurčité výrazy, které mohou vést k různým výsledkům, dle konkrétního příkladu.

Příklad: ▶ Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2-3n+4)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n}{n^3-n^2}$

Řešení: a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2-3n+4)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)=\infty\cdot 2=\infty.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n}{n^3-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=1.$ ◀

Věty o limitách

Věta ▶ Nechť $a_n \leq b_n$ pro s.v. n[1] a $\exists$ $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.
Potom $a \leq b$. ◀

Věta (O limitě sevřené posloupnosti)

▶ Nechť pro s.v. n platí $a_n \leq b_n \leq c_n$ a $\exists$ $\lim a_n = \lim c_n = L$
Pak $\exists$ $\lim b_n$ a je: $\lim b_n = L$. ◀

Věta (O limitě monotónní posloupnosti)

▶ Nechť $\{a_n\}$ je monotónní a ohraničená posloupnost. Potom je konvergentní, tj. má vlastní limitu. ◀

Věta ▶ Monotónní a neohraničená posloupnost má limitu:
$+\infty$ pro posloupnost rostoucí, nebo neklesající,
$-\infty$ pro posloupnost klesající, nebo nerostoucí.

[1] s.v. n znamená *skoro všechna* n, jinými slovy: *od jistého* n *počínaje*.

Geometrická posloupnost

Příklad: ▶ Ukažte, že

$$\lim q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

Důkaz:

1) Předpokládáme

$0 < q < 1 \mid \cdot q^n$, označíme $a_n = q^n$

$0 < q^{n+1} < q^n \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ posloupnost je klesající a je omezená

$a_1 > a_2 > \ldots > a_n \ldots > 0 \Rightarrow$ má vlastní limitu L.

$\lim q^n = \lim q^{n+1} = L$

$\lim q^{n+1} = q \lim q^n \Rightarrow L = q \cdot L \Rightarrow L(1-q) = 0 \Rightarrow L = 0.$ cbd. ◀

Zbylé si jistě pilný čtenář dokáže sám.

Eulerovo číslo

Na závěr jedna důležitá limita

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Zde e je Eulerovo číslo, které je iracionální a transcendentní.

$$e \doteq 2.718281828459045$$

Děkuji za pozornost