Lineární obal, báze

Helena Říhová

FBMI

12. října 2010

Obsah

Definice lineárního obalu

Definice

- Nechť L je lineární prostor a $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in L$.

Lineární obal vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů.

$$\mathrm{LOB}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \stackrel{ozn}{=} \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle = \{\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{x}_i; \;\; k_i \in \mathbf{R}\}$$

Příklad: ▶ Jsou dány vektory: $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{y} = (2, 3, 0)$.

a) Nalezněte LOB$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$

b) Zjistěte, zda $\boldsymbol{v} = (2, 2, -2) \in \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle$

Řešení:

a) LOB$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) =$

$= \{\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y};\ a,\ b \in \mathbf{R}\} = \{\boldsymbol{u} = (a + 2b, 2a + 3b, 3a);\ a,\ b \in \mathbf{R}\}$

b) $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle$, pokud

$$\begin{aligned} a + 2b &= 2 \\ 2a + 3b &= 2 \\ 3a &= -2 \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že soustava nemá řešení, takže $\boldsymbol{v} \notin \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle$ ◀

Příklad: ▶ Jsou dány vektory: $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{y} = (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{z} = (-1, 2, 0)$. Ukažte, že LOB $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}) = \mathbf{R}^3$.

(Vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ v tom případě nazýváme genarátory $\mathbf{R}^3$.

Řešení: Je třeba ukázat, že pro $\forall$ vektor $(a,\ b,\ c)$ $\exists\, k_1,\ k_2,\ k_3$ tak, že

$$(a,\ b,\ c) = k_1\boldsymbol{x} + k_2\boldsymbol{y} + k_3\boldsymbol{z}.$$

Úkol pilný čtenář jistě zvládne samostatně. ◀

Vlastnosti lineárního obalu

1) Je-li L lineární prostor, $M \subseteq L$, $N \subseteq L$, $M \subseteq N$, pak $\langle M \rangle \subseteq \langle N \rangle$.

2) Je-li L lineární prostor, $M \subseteq L$, pak
   a) $M \subseteq \langle M \rangle$,
   b) $\langle M \rangle = \langle \langle M \rangle \rangle$. Tj. další obalení už nic nepřidá.

3) Je-li L lineární prostor, $M \subseteq L$, pak $M \subseteq\subseteq L \Leftrightarrow M = \langle M \rangle$.

4) Je-li L lineární prostor, $M \subseteq L$, pak $\langle M \rangle$ je nejmenší podprostor, pro který $M \subseteq \langle M \rangle$.

<u>*Poznámka:*</u> Chceme-li vyjádřit nějaký lineární prostor jako lineární obal skupiny vektorů, je úsporné volit LNZ skupinu.

Příklad: ▶ Jsou dány vektory: $\boldsymbol{u} = (1,1)$, $\boldsymbol{v} = (1,-1)$, $\boldsymbol{w} = (3,2)$.
Dokažte, že $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \mathbf{R}^2$.

Důkaz: $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = (a,b)$

$(a,b) \in \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \;\Rightarrow\; (a,b) = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$

$(a,b) = k_1(1,1) + k_2(1,-1)$

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 &= a \\ k_1 - k_2 &= b \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_1 = \frac{a+b}{2}, \quad k_2 = \frac{a-b}{2} \;\Rightarrow\; \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \mathbf{R}^2.$$

$\boldsymbol{w} \in \mathbf{R}^2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{w} \in \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \;\Rightarrow\; \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ ◀

Definice báze

Definice

▶ Báze lineárního prostoru L je taková množina B vektorů z L, že platí:

a) B je LNZ,

b) $\langle B \rangle = L$. ◀

Poznámka: Triviální prostor, tj. prostor, který obsahuje pouze nulový prvek, nemá bázi.

Příklad: ▶ Množina $B = \{(1,2,3),\ (2,0,-1),\ (1,1,0)\}$ je báze v $\mathbf{R}^3$. ◀

Příklad: ▶ Množina $B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ je báze v $\mathbf{R}^3$. Nazývá se standardní, jednotlivé vektory báze obvykle značíme: $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3.$

Snadno se ukáže LNZ vektorů báze, jakož i vyjádření libovolného vektoru z $\mathbf{R}^3$ pomocí báze:
pro $\forall\,(a,b,c)$ platí : $(a,b,c) = a\boldsymbol{e}_1 + b\,\boldsymbol{e}_2 + c\,\boldsymbol{e}_3.$ ◀

Příklad: ▶ V prostoru $P_{\leq n}$ všech polynomů stupně nejvýše n tvoří bázi množina $B = \{1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n\}.$ ◀

Příklad: ▶ V prostoru U_o všech orientovaných úseček tvoří bázi libovolné tři vektory, které neleží v jedné rovině. ◀

Vlastnosti báze

1) Každý lineární prostor má nekonečně mnoho bází.

2) Dvě báze téhož prostoru mají buď nekonečně mnoho prvků, nebo stejný počet prvků.

Definice

- Dimenze lineárního prostoru L je rovna počtu prvků báze L, označuje se $\dim L$.

Příklad: $\dim \mathbf{R}^3 = 3, \quad \dim \mathbf{R}^n = n, \quad \dim P = \infty, \quad \dim\{\boldsymbol{o}\} = 0.$

Dimenze

Věta ▶ Nechť L je LP a $M \subseteq\subseteq L$. Pak $\dim M \leq \dim L$. ◀

Věta ▶ Nechť L je LP, $\dim L = n$ a $M \subseteq L$, $M = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$.
Pak platí:

a) Je-li M LNZ $\Rightarrow$ $m \leq n$. To znamená, že v lineárním prostoru dimenze n nenajdu víc než n LNZ vektorů,

b) Je-li $m > n$ $\Rightarrow$ M je LZ.

c) Pro $m = n$ platí: M je LNZ $\Leftrightarrow$ $\langle M \rangle = L$. Tj. M je báze. ◀

Každá LNZ množina n vektorů v L, kde $n = \dim L$, tvoří bázi v L.