Matice

Helena Říhová

FBMI

12. října 2010

Obsah

1. Matice
   - Definice matice
   - Rovnost matic, součet matic, násobek matice
   - Gaussova eliminace a matice
   - Hodnost matice
   - Transponovaná matice
   - Součin matic
   - Jednotková matice
   - Inverzní matice
   - GJ eliminace

Definice matice

Definice

▶ Matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) je $m \times n$ čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců. ◀

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a_{ij} je prvek matice, číslu i se říká řádkový index, číslo j je sloupcový index,

$(a_{i1}\ a_{i2}\ \ \ldots\ a_{in}) \overset{ozn}{=} a_{i*}$ je i-tý řádek,

Definice matice

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \overset{ozn}{=} a_{*j} = (a_{1j}\ a_{2j}\ \ \ldots\ \ a_{mj})^T \text{ je } j\text{-tý sloupec.}$$

Někdy se používá zápis: $\mathbf{A} = (a_{ij}),\ i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Matice typu (m, n), kde $m \neq n$ – je obdélníková,
kde $m = n$ – je čtvercová.

Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde $(a_{ij}) = 0$ pro $\forall\, i, j$, se nazývá nulová matice.

Rovnost matic, součet matic, násobek matice

Rovnost matic: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jestliže a) jsou stejného typu,
b) $a_{ij} = b_{ij}$ pro $\forall\, i,\, j$.

Sčítání matic: $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou typu (m, n). Součet matic $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, kde $\mathbf{C}$ je typu (m, n) a $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro $\forall\, i,\, j$.

Násobení matice číslem: $\mathbf{A}$ je typu (m, n), $k \in \mathbf{R}$. Násobek matice $k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{D}$, kde $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$ pro $\forall\, i,\, j$.

Množina všech matic typu (m, n) je uzavřená na takto definované sčítání a násobení reálným číslem.

Věta

Věta ▶ Množina všech matic typu (m, n) s výše uvedenými operacemi sčítání a násobení číslem tvoří LP. Nulový prvek je nulová matice. ◀

Příklad: ▶ Množina

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$ tvoří (standardní)

bázi v LP všech čtvercových matic 2×2.

Gaussova eliminace a matice

GE se provádí pomocí následujících tzv. elementárních úprav:

1. přehození řádků
2. vynásobení řádku nenulovým číslem
3. přičtení násobku řádku k jinému řádku
4. odstranění nebo přidání nulového řádku

Gaussova eliminace a matice

Příklad: ▶ Máme matici $\mathbf{A}$ a provedeme GE.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{ccc} -2 & -1 & -3 \\ \hookleftarrow & & \\ & \hookleftarrow & \\ & & \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \qquad \mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$

◀

Dá se ukázat, že LOB řádků matice $\mathbf{A}$ je roven LOB řádků matice $\mathbf{B}$ a řádky matice $\mathbf{B}$ jsou LNZ $\Rightarrow$ řádky matice $\mathbf{B}$ tvoří bázi LOB řádků matice $\mathbf{A}$.

Hodnost matice

Definice

▶ Hodnost matice $\mathbf{A}$ je maximální počet LNZ řádků matice, značíme $h(\mathbf{A})$. ◀

$h(\mathbf{A}) = \dim(\text{LOB řádků matice})$.

Gaussova eliminace (elementární úpravy) nemění hodnost matice.
Jestliže matice $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ elementárními úpravami, pak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Poznámka: Matice $\mathbf{B}$ z posledního příkladu se nazývá horní trojúhelníková - má pod hlavní diagonálou nuly.

Horní trojúhelníková matice

Věta ▶ Horní trojúhelníková matice má vždy LNZ řádky. ◀

Věta ▶ Každou matici lze konečným počtem kroků Gaussovy eliminace převést na horní trojúhelníkovou matici. ◀

Důsledek

h(**A**) = počet nenulových řádků v horní trojúhelníkové matici, kterou dostaneme z matice **A** Gaussovou eliminací.

Transponovaná matice

Definice

- Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je typu (m, n). Pak matice $\mathbf{A}^T = (a_{ij}^T) = (a_{ji})$ typu (n, m) se nazývá transponovaná k $\mathbf{A}$.

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Platí: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Transponovaná matice

Věta ▶ Pro každou matici $\mathbf{A}$ je $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}^T) \Rightarrow \mathrm{h}(\mathbf{A})$ je počet lineárně nezávislých sloupců. ◀

Věta ▶ Je-li $\mathbf{A}$ typu (m, n), pak $\mathrm{h}(\mathbf{A}) \leq \mathrm{mim}(m, n)$. ◀

Součin matic

Definice

▶ Necht' $\mathbf{A}$ je typu (m, n), $\mathbf{B}$ je typu (n, k). Potom součin matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ je matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ typu (m, k), která má prvky

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lj} = a_{i*} \cdot b_{*j} \quad i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, k$$ ◀

! Podmínka, aby šly matice znásobit: první má tolik sloupců, co druhá řádků !

Násobení matic obecně není komutativní. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Součin matic

Věta ▶ Nechť matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ jsou patřičného typu. Pak:

1) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
3) $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$
4) $k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (k\,\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (k\,\mathbf{B})$
5) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ ◀

Jestliže čtvercové matice stejného typu splňují: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, říkáme, že komutují.

Jednotková matice

Definice

- Čtvercová matice $\mathbf{E}$ typu (n, n) se nazývá jednotková, jestliže $e_{ij} = \delta_{ij}^{*)}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$, na diagonále jsou 1, jinde 0.

*) Takzvané Kroneckerovo delta: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j. \end{cases}$

Platí: pro každou matici $\mathbf{A}_{nn}$ je $\mathbf{A}\,\mathbf{E} = \mathbf{E}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Definice

▶ Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová typu (n, n), $\mathbf{E}$ jednotková typu (n, n). Matici $\mathbf{B}$ typu (n, n), která splňuje $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, nazýváme inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. ◀

Věta ▶ Pokud existuje $\mathbf{A}^{-1}$, je dána jednoznačně. ◀

Věta ▶ Matice $\mathbf{A}_{nn}$ má inverzní matici právě, když $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = n$, tj. řádky matice jsou LNZ. ◀

Definice

▶ Čtvercová matice $\mathbf{A}_{nn}$ se nazývá regulární, pokud $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = n =$ počet řádků. Je-li $\mathrm{h}(\mathbf{A}) < n$ je matice singulární. ◀

Inverzní matice

Věta ▶ Nechť $\mathbf{A}_{nn}$, $\mathbf{B}_{nn}$ jsou regulární. Potom i $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je regulární a $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ ◀

Výpočet $\mathbf{A}^{-1}$ Gauss-Jordanovou eliminací (GJ).

GJ eliminace převádí pomocí elementárních úprav obdélníkovou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ na $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$.

Příklad: ▶ Určete $\mathbf{A}^{-1}$ pro $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Řešení:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\lceil \begin{array}{c} \text{vyrobíme nuly} \\ \text{v prvním sloupci} \end{array} \right\rfloor \sim$$

GJ eliminace

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} \text{vyrobíme nulu} \\ \text{v druhém sloupci} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} \text{vyrábíme nuly} \\ \text{nad hlavní} \\ \text{diagonálou} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

GJ eliminace

$$\sim \left[\begin{array}{c} \text{zbývá zajistit} \\ \text{jedničky} \\ \text{na diagonále} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

A máme inverzní matici

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3/2 & 5/2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Kontrola: přesvědčíme se, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Maticová rovnice

Inverzní matice umožňuje řešit maticové rovnice.

Příklad: ▶ Vyřešte maticovou rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = 2\mathbf{A} - \mathbf{A}\,\mathbf{X}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Postupně rovnici upravíme

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} + \mathbf{A}\,\mathbf{X} &= 2\mathbf{A} \\ \mathbf{E}\mathbf{X} + \mathbf{A}\,\mathbf{X} &= 2\mathbf{A} \\ (\mathbf{E} + \mathbf{A})\,\mathbf{X} &= 2\mathbf{A} \\ \mathbf{X} &= (\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} \cdot 2\mathbf{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

◀