Lineární prostory

Helena Říhová

FBMI

27. září 2010

Obsah

1. Lineární prostory
   - Operace $\oplus$ a $\odot$
   - Definice lineárního prostoru (LP)
   - Definice lineárního podprostoru

Budeme pracovat s různými množinami, pro jejichž prvky budou definovány operace sčítání a násobení reálným číslem.

Příklad: ▶ Je dána množina $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b),\ a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R}\}$ a operace

$$\oplus : \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \qquad (a, b) \oplus (c, d) \stackrel{def}{=} (a + c, b + d)$$

$$\odot : \quad \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \qquad k \odot (a, b) \stackrel{def}{=} (ka, kb)$$

Protože výsledek je opět z $\mathbf{R}^2$, říkáme, že množina $\mathbf{R}^2$ je na tyto operace uzavřená. ◀

Snadno zjistíme, že takto definované operace splňují, stejně jako běžné operace sčítání a násobení, komutativnost, asociativnost, distributivnost. Nemusí tomu tak být vždy.

Operace $\oplus$ a $\odot$

Příklad: ▶ Jiné definice operace sčítání:

a) $\oplus: \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \qquad (a,b) \oplus (c,d) \stackrel{def}{=} (a+d, b+c)$

Bez velké námahy se přesvědčíme, že toto sčítání komutativní není, neboť:

$(c,d) \oplus (a,b) = (b+c, a+d) \neq (a,b) \oplus (c,d)$

b) $\oplus: \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad (a,b) \oplus (c,d) \stackrel{def}{=} (a+c, b+d, 1)$

Takovéhle sčítání sice komutativní je, ale množina $\mathbf{R}^2$ na ně není uzavřená, anžto výsledek je z množiny $\mathbf{R}^3$. ◀

Příklad: ► Nakonec z jiného soudku. Označíme P množinu všech polynomů, tj. funkcí $p:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, které jsou dány vztahem:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R},\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}.$$

$$\oplus: \quad P \times P \to P \qquad (p \oplus q)(x) \stackrel{def}{=} p(x) + q(x) \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R},$$

$$\odot: \quad \mathbf{R} \times P \to P \qquad (k \odot p)(x) \stackrel{def}{=} k\,p(x) \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{R}.$$

Nadefinované operace splňují komutativní, asociativní i distributivní zákon a množina P je na ně uzavřená. ◄

Nadále budeme pro operace sčítání a násobení používat vesměs pouze jednoduché symboly $+$, $\cdot$, u násobení většinou žádný symbol.

Definice lineárního prostoru (LP)

Definice

▶ Lineární prostor je každá neprázdná množina L, na které jsou definovány operace sčítání $+ \; : \quad L \times L \to L,$
a násobení reálným číslem $\cdot \; : \quad \mathbf{R} \times L \to L,$
přičemž tyto operace mají pro $\forall\, \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z} \in L$ a $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ následující vlastnosti:

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ komutativní zákon,

2) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ asociativní zákon sčítání,

3) $\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{x}$ asociativní zákon násobení,

4) $\alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}$ distributivní zákon pro sčítání prvků z L,

5) $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}$ distributivní zákon pro sčítání čísel,

6) $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,

7) $\exists\, \boldsymbol{o} \in L$, že $0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ pro $\forall\, \boldsymbol{x} \in L$.

Prvky LP se nazývají vektory, reálná čísla jsou skaláry, $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor (nulový prvek).

V definici je naznačeno, že množina L je na operaci sčítání a násobení uzavřená.
$+$ a $\cdot$ značí podle okolností operace s prvky z L, nebo operace v $\mathbf{R}$.

Věta ▶ Nulový prvek $\boldsymbol{o} \in L$ splňuje:

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{x}$ pro $\forall\, \boldsymbol{x} \in L$,

2) $\alpha \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ pro $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$,

3) Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbf{L}$, je-li $\alpha\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ a $\alpha \neq 0$, pak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Věta - vlastnosti nulového vektoru

Důkaz: ▶ Vyjdeme z definice LP, čísla nad rovnítky označují použitou vlastnost.

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} \overset{(6,7)}{=} 1 \cdot \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{x} \overset{(5)}{=} (1+0) \cdot \boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} \overset{(6)}{=} \boldsymbol{x}$,

2) $\alpha \cdot \boldsymbol{o} \overset{(7)}{=} \alpha \cdot (0 \cdot \boldsymbol{x}) \overset{(3)}{=} (\alpha \cdot 0) \cdot \boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} \overset{(7)}{=} \boldsymbol{o}$,

3) předpokládáme: $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, $\alpha \neq 0$,

pak $\boldsymbol{x} \overset{(6)}{=} 1 \cdot \boldsymbol{x} = (\alpha \cdot \frac{1}{\alpha})\boldsymbol{x} \overset{(3)}{=} \frac{1}{\alpha}(\alpha \boldsymbol{x}) \overset{\text{předp.}}{=} \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{o} = \lceil \text{bod 2) věty} \rfloor = \boldsymbol{o}$ ◀

Příklad: ▶ Množina $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n);\ x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, \dots, n\}$ s operacemi

$+ :\ \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\cdot\ :\ \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \quad k \cdot \boldsymbol{x} = (k\, x_1, \dots, k\, x_n)$ je lineární prostor. Dokažte.

Důkaz je lehký, necháme ho laskavému čtenáři. ◀

Uspořádané n-tice čísel tedy můžeme považovat za vektory, říkáme jim aritmetické vektory a zapisujeme je $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, přičemž x_i je i-tá složka vektoru $\boldsymbol{x}$.

Příklad: ▶ Množina F_D všech funkcí jedné reálné proměnné, definovaných na $D \subseteq \mathbf{R}$ s operacemi $+, \cdot$ tvoří LP. Operace jsou definovány následovně:

$$\left.\begin{aligned} (f+g)(x) &\overset{def}{=} f(x)+g(x), \\ (k\cdot f)(x) &\overset{def}{=} k\cdot f(x) \end{aligned}\right\} \text{pro } \forall\, x \in D.$$

Výsledek je opět prvek F_D, vlastnosti 1) ... 7) z definice LP platí.

Nulový prvek je $\boldsymbol{o} = f(x) \equiv 0$ pro $\forall x \in D$. F_D je tedy lineární prostor a funkce jsou vektory. ◀

Příklad: ▶ Množina všech polynomů s výše definovanými operacemi sčítání a násobení reálným číslem tvoří lineární prostor, protože $p(x) = f_R(x)$. ◀

Příklad: ▶ Množina P_n všech polynomů stupně právě n s výše definovanými operacemi sčítání a násobení reálným číslem netvoří lineární prostor.

Důkaz: $(x^2 + 3x - 5) + (-x^2 + 4x + 1) = 7x - 4 \Rightarrow$ množina P_n není uzavřená na sčítání. ◀

Definice

▶ Máme lineární prostor L s operacemi $+, \cdot$ a množina $M \subseteq L$ je neprázdná podmnožina L. Jestliže pro $\forall\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in M$ a $\forall\ \alpha \in \mathbf{R}$ je
$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M, \quad \alpha\boldsymbol{x} \in M$ (tj. množina M je na dané operace uzavřená), pak říkáme, že M je lineární podprostor prostoru L a značíme $M \subseteq\subseteq L$, nebo $M \subset\subset L$, je-li $M \subset L$. ◀

Poznámka: Je-li množina M podprostor, musí obsahovat nulový prvek. Vyplývá to z uzavřenosti M vůči násobení.

Příklad: ▶ a) $P \subset\subset F_R$,

b) $P_{\leq n} \subset\subset P$,

c) $P_{\leq n} \subset\subset F_R$,

kde P je množina všech polynomů, $P_{\leq n}$ je množina všech polynomů stupně nejvýše n. ◀

Příklad: ▶ Množina $M \subset \mathbf{R}^n$; $M = \{(a, \dots, a);\ a \in \mathbf{R}\}$ je podprostorem $\mathbf{R}^n$. Dokažte.

Důkaz: $(a, \dots, a) + (b, \dots, b) = (c, \dots, c) \in M$

$\alpha\,(a, \dots, a) = (d, \dots, d) \in M$ cbd. ◀

Příklad: ▶ Jsou dány množiny:

a) $M_1 \subset \mathbf{R}^3$; $M_1 = \{(x, y, z);\ x - y = 0\}$,

b) $M_2 \subset \mathbf{R}^3$; $M_2 = \{(x, y, z);\ x + y - 3z = 0\}$,

c) $M_3 \subset \mathbf{R}^3$; $M_3 = \{(x, y, z);\ x + z = 1\}$.

Rozhodněte, zda jde o podprostory $\mathbf{R}^3$.

Řešení: Stačí zjistit uzavřenost vůči operacím sčítání a násobení reálným číslem.

ad a) $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Aby výsledek sčítání byl prvkem množiny M_1, musí

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = 0.$$

Ale $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0 + 0 = 0.$

Podobně pro násobení $\alpha\,(x, y, z) = (\alpha\, x, \alpha\, y, \alpha\, z)$,

$$(\alpha\, x) - (\alpha\, y) = \alpha\,(x - y) = \alpha\, 0 = 0.$$

Tedy množina M_1 je uzavřená vůči oběma operacím, a je tudíž podprostorem $\mathbf{R}^3$.

ad b) $\quad (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Složky výsledného vektoru musí splňovat

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2) = 0.$$

Levou stranu upravíme

$$(x_1 + y_1 - 3z_1) + (x_2 + y_2 - 3z_2) = 0 + 0 = 0.$$

Pro násobení $\quad \alpha\,(x, y, z) = (\alpha\, x, \alpha\, y, \alpha\, z),$

$$\alpha\, x + \alpha\, y - 3\alpha\, z = \alpha(x + y - 3z) = 0$$

Podmínky uzavřenosti jsou splněny, M_2 je podprostor $\mathbf{R}^3$.

ad c) Požadavek je, aby

$$(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2) = 1.$$

Leč levá strana je rovna

$$(x_1 + z_1) + (x_2 + z_2) = 1 + 1 = 2.$$

To znamená, že výsledek sčítání neleží v množině M_3 a ta proto není podprostor $\mathbf{R}^3$. ◀

Poznámka: Množina je podprostorem nějakého prostoru, když je jeho podmnožina a zároveň je lineární prostor. Tj. mimo jiné, musí obsahovat nulový prvek. Množina M_3 není podprostor, protože neobsahuje nulový prvek. Vektor $(0, 0, 0) \notin M_3$, neboť $0 + 0 \neq 1$.

Na závěr příklad, kde sčítání je násobení a násobení je umocňování.

Příklad: ▶ Dokažte, že množina $\mathbf{R}^+$ s operacemi

$$\oplus : \ \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ \quad x \oplus y \stackrel{def}{=} x \cdot y,$$

$$\odot : \ \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ \quad \alpha \odot x \stackrel{def}{=} x^\alpha$$

je lineární prostor. Určete nulový prvek tohoto prostoru. ◀

V tomto případě vřele doporučuji rozlišovat graficky kroužkované a nekroužkované operace. Příklad je určen na cvičení nebo jako dcv.