# Lineární nezávislost

Helena Říhová

FBMI

8. října 2010

# Obsah

Definice

▶ Lineární kombinací (LK) vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in L$, kde $L$ je LP, rozumíme vektor

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} k_i \, \boldsymbol{x}_i, \quad \text{čísla } k_i \in \mathbf{R}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

jsou koeficienty lineární kombinace; $\quad \boldsymbol{x} \in L$. ◀

Jsou-li všechny koeficienty lineární kombinace nulové, nazýváme kombinaci triviální. Je-li alespoň jeden koeficient nenulový, lineární kombinace je netriviální.

# Věta

Věta ▶ Triviální kombinace jakýchkoli vektorů (ovšem všechny musí být ze stejného lineárního prostoru) je rovna nulovému vektoru. ◀

*Důkaz* je také triviální, tak ho nebudeme dělat.

# Definice lineární (ne)závislosti

Definice

▶ Skupina vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je lineárně závislá (LZ), jesliže $\exists$ netriviální lineární kombinace těchto vektorů, která je rovna nulovému vektoru.
(Tj. $\exists\, k_1, \ldots, k_n$ taková, že alespoň jedno $k_i \neq 0$ a zároveň
$$\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}.)$$
Skupina vektorů je lineárně nezávislá (LNZ), není-li lineárně závislá.
Tj. pouze triviální lineární kobinace je rovna nulovému vektoru. ◀

Příklad: ▶ Jsou dány vektory z $\mathbf{R}^3$ :

$\boldsymbol{a} = (1,1,1),\ \boldsymbol{b} = (3,2,0),\ \boldsymbol{c} = (0,-1,-3).$

Zjistěte, zda jsou L(N)Z.

*Řešení*: Položíme $k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. Máme vektorovou rovnici, která představuje soustavu tří rovnic pro tři neznámé $k_1,\ k_2,\ k_3$. Pokud má soustava jediné řešení $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, tedy pouze triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru, jsou zadané vektory LNZ. Jestliže existuje i netriviální (nenulové) řešení soustavy, to znamená, že existuje netrivilní lineární kombinace zadaných vektorů, která je rovna nulovému vektoru, pak jsou vektory LZ.

Soustava rovnic pro neznámé $k_1,\ k_2,\ k_3$ je

$$\begin{array}{rcl} k_1 + 3k_2 & = & 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_3 & = & 0 \\ k_1 \qquad - 3k_3 & = & 0 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{napíšeme} \\ \text{matici} \\ \text{soustavy} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -3 \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcl} k_1 + 3k_2 \qquad & = & 0 \\ -k_2 - k_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Řešení je nekonečně mnoho závislých na jednom parametru

$$\boldsymbol{k} = (-3p,\ p,\ -p),\ p \in \mathbf{R}.$$

Existuje tedy netriviální lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$,

např. při volbě $p = 1$ je $\boldsymbol{k} = (-3,\ 1,\ -1)$

a dostáváme $-3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. Vektory $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ jsou proto LZ.

*Poznámka:* Jsou-li vektory lineárně závislé, lze alespoň jeden z nich vyjádřit coby lineární kombinaci ostatních. Z poslední rovnice je např. $\boldsymbol{c} = -3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Ještě o tom bude řeč.

Příklad: ▶ Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (3, 2, 0)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, 2)$. Zjistěte L(N)Z.

*Řešení*: Utvoříme lineární kombinaci daných vektorů

$k_1\,(1, 1, 1) + k_2\,(3, 2, 0) + k_3\,(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$.

a určíme, kdy je rovna nulovému vektoru. Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} k_1 + 3k_2 \phantom{{}+k_3} &= 0 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 &= 0 \\ k_1 \phantom{{}+2k_2} + 2k_3 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad k_1 = k_2 = k_3 = 0 \quad \Rightarrow$ Vektory jsou LNZ. (Žádný z nich nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.) ◀

Příklad: ▶ Máme lineární prostor všech funkcí, definovaných na **R** a uvažujeme tři funkce $f,\ g,\ h:\quad f(x)=\sin x,\ g(x)=\cos x,\ h(x)=4.$ Zjistěte, zda $f,\ g,\ h$ jsou L(N)Z.

*Řešení*: Postupujeme jako v předešlém příkladu. Položíme

$\alpha f(x)+\beta g(x)+\gamma h(x)=0$ pro $\forall x\in\mathbf{R}$.

Postupně volíme vhodná $x$.

$$x=0:\ \alpha\sin 0+\beta\cos 0+4\gamma=0\ \Rightarrow\ \beta+4\gamma=0\quad \beta=-4\gamma$$

$$x=\frac{\pi}{2}:\ \alpha\sin\frac{\pi}{2}+\beta\cos\frac{\pi}{2}+4\gamma=0\ \Rightarrow\ \alpha+4\gamma=0\quad \alpha=-4\gamma$$

$$x=-\frac{\pi}{2}:\ \alpha\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\beta\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+4\gamma=0\ \Rightarrow\quad \alpha=4\gamma$$

Rovnice splňují pouze $\alpha=\beta=\gamma=0$, a tedy vektory (funkce) jsou lineárně nezávislé. ◀

# Poznámka

*Poznámka:* Lineární nezávislost funkcí z předchozího příkladu znamená, že žádnou z nich nemůžeme vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Ale platí: $4 = 4\,(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Zde ovšem na pravé straně není lineární kombinace funkcí sinus a kosinus.

Příklad: ▶ Zjistěte lineární (ne)závislost funkcí $f$, $g$, $h$ z $F_R$
$f(x) = \sin^2 x,\ g(x) = 3\cos^2 x,\ h(x) = 4.$

*Řešení*: Vyjdeme opět z lineární kombinace

$\alpha \sin^2 x + 3\beta \cos^2 x + 4\gamma = 0$ pro $\forall x \in \mathbf{R}$ a dosadíme zvolená $x$.

$$x = 0: \quad 3\beta + 4\gamma = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}: \quad \alpha + 4\gamma = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4}: \quad \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta + 4\gamma = 0$$

Soustavu řeší: $\alpha = -12p, \quad \beta = -4p, \quad \gamma = 3p,\ p \in \mathbf{R}$

Snadno se přesvědčíme, že stejné koeficienty dávají nulovou lineární kombinaci pro $\forall\ x$. Funkce jsou tedy lineárně závislé, nebot'existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je pro $\forall\ x$ rovna nulovému vektoru (funkci). ◀

Příklad: ▶ Máme LNZ vektory $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}\ \in L,\ L$ je LP. Definujeme $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{v} + a\,\boldsymbol{w},\ a \in \mathbf{R}$.
Pro které hodnoty $a$ jsou vektory $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ LNZ?

*Řešení*: Vytvoříme lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ a položíme ji rovnu nulovému vektoru

$$k_1(2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + k_2(\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}) + k_3(\boldsymbol{v} + a\,\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}.$$

Levou stranu upravíme

$$(2k_1 + k_2)\boldsymbol{u} + (-k_1 + 3k_2 + k_3)\boldsymbol{v} + (-2k_2 + a\,k_3)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$$

a využijeme LNZ vektorů $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}$.

Dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcl} 2k_1 + k_2 & = & 0 \\ -k_1 + 3k_2 + k_3 & = & 0 \\ -2k_2 + ak_3 & = & 0 \end{array} \rightarrow k_1 = -\frac{k_2}{2}, \quad k_3 = \frac{2k_2}{a},\ a \neq 0.$$

Dosadíme do 2. rovnice a vyjde: $\dfrac{7a+4}{2a} k_2 = 0 \quad \Rightarrow$

Je-li $a = -\dfrac{4}{7}$ soustava má $\infty$ řešení $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ jsou LZ.

Je-li $a \neq -\dfrac{4}{7},\ a \neq 0$ vektory jsou LNZ.

Zbývá vyšetřit $a = 0$. Zjistíme, že vektory jsou rovněž LNZ.

Závěr: Vektory $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ jsou LNZ pro $a \neq -\dfrac{4}{7}$.

# Vlastnosti lineární (ne)závislosti

Věta ▶ Máme vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, které jsou prvky lineárního prostoru $L$. Pak platí:

1) LNZ nebo LZ vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, se nezmění při změně pořadí vektorů.
2) Je-li pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$, jsou vektory LZ.
3) Jestliže $\exists\, i, j$ tak, že $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$, jsou vektory LZ.
4) Jsou-li $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ LZ a $\boldsymbol{x}_{n+1} \in L$, pak $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n+1}$ jsou též LZ.
5) Jsou-li $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ LNZ, pak i $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ jsou LNZ.
6) Samotný vektor $\boldsymbol{x}_1$ braný jako skupina je LNZ, právě když $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{o}$. ◀

# Vlastnosti lineární (ne)závislosti

*Důkaz:* ▶

ad 1) O L(N)Z vektorů rozhoduje jejich lineární kombinace, a ta se záměnou pořadí vektorů nemění (sčítání vektorů je komutativní).

ad 2) Předpokládáme, že $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$, pak pro $k_1 = 1$,

$k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0$ je $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$

netriviální LK rovná nul. vektoru, $\Rightarrow$ vektory jsou LZ.

ad 3) Předpokládáme $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$. Stačí volit $k_1 = -k_2,\ k_i = 0$ pro $i = 3, \ldots, n$ a máme netriviální LK, která je rovna nulovému vektoru.

# Vlastnosti lineární (ne)závislosti

ad 4) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou LZ $\Rightarrow$ $\exists$ netriviální LK $\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$.

Pak ale lineární kombinace $\sum_{i=1}^{n+1} k_i \boldsymbol{x}_i$, kde $k_{n+1} = 0$, je netriviální a rovna nulovému vektoru.

ad 5) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou LNZ, předpokládáme, že $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ jsou LZ.

Potom musí existovat netriviální LK $\sum_{i=1}^{n-1} k_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$.

Podle bodu 4) $\Rightarrow$ $\exists$ netriviální LK $\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$, což je spor, takže vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ jsou LNZ.

# Vlastnosti lineární (ne)závislosti

ad 6) Je-li vektor $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$, je podle bodu 2) LZ.

Předpokládáme $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{o}$.
Je-li $\boldsymbol{x}_1$ LZ, $\exists\, k \neq 0$, že $k\,\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$. Podle vlastností nulového vektoru by však muselo $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$. To je spor s předpokladem, a tedy $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{o}$ je LNZ. ◀

Příklad: ▶ Máme vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ z lineárního prostoru $\mathbf{R}^n$.
Dokažte, že pro $m > n$ jsou vektory LZ.

*Důkaz*: Sestavíme lineární kombinaci

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{x}_i \quad \text{a položíme ji rovnu nulovému vektoru.}$$

To představuje $n$ rovnic pro $m$ neznámých $k_1, \dots, k_m$.
Provedeme Gaussovu eliminaci a získáme $n'$ rovnic, kde $n' \leq n$, $n' < m$
$\Rightarrow$ $m - n'$ neznámých můžeme libovolně volit, tedy i nenulově
$\Rightarrow$ vektory jsou LZ. ◀

# Důsledek

Jsou-li $n$-složkové aritmetické vektory lineárně nezávislé, je jich nejvýše $n$.

Je-li $n$-složkových vektorů víc než $n$, jsou určitě LZ.

Příklad: ▶ Jsou dány vektory:
$x_1 = (1,2,3),\ x_2 = (0,1,1),\ x_3 = (0,2,1),\ x_4 = (1,1,-1),\ x_5 = (2,1,0)$.
Dokažte, že jsou LZ.

*Řešení*: Ukážeme, že existuje netriviální LK daných vektorů, která je rovna nulovému vektoru.

$$\sum_{i=1}^{5} k_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$$

Vektory mají 3 složky, dostaneme tedy 3 rovnice pro 5 neznámých $k_1, \dots k_5$. Matici příslušné soustavy jsme postupně upravili

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow k_4,\ k_5 \text{ můžeme volit,}$$

tj. existuje netriviální lineární kombinace daných vektorů,
tudíž jsou LZ. ◀

# Věta

Věta ▶ Předpokládáme $n \geq 2$. Vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou LZ právě, když $\exists\, r \in \{1, \ldots, n\}$, že

$$\boldsymbol{x}_r = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} k_i \, \boldsymbol{x}_i$$

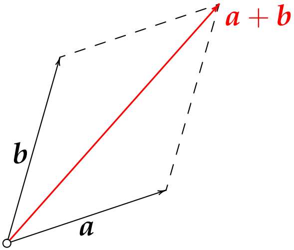
To znamená, že alespoň jeden z vektorů jde vyjádřit jako lineární kombinace ostatních.

*Důsledek*

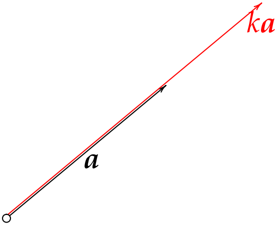
Dva vektory jsou LZ právě, když jeden je násobek druhého.

# Geometrické vektory

Geometrický vektor je orientovaná úsečka umístěná do počátku.




součet vektorů




násobek vektoru

# Vlastnosti geometrických vektorů

1) Dva vektory jsou LZ právě, když leží v jedné přímce.

2) Jsou dány dvě LNZ orientované úsečky, pak libovolný vektor v rovině úseček je jejich lineární kombinací.

3) Jestliže $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ leží v rovině, pak jsou LZ.

4) Jsou-li $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ LNZ a $\boldsymbol{w}$ neleží v rovině $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, pak $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ jsou LNZ.

5) Jsou-li $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ LNZ, pak množina všech lineárních kombinací $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$ představuje úsečky, jejichž koncové body vyplní celý prostor $\mathbf{R}^3$.