Lineární algebra

Helena Říhová

FBMI

27. září 2010

Obsah

1. Úvod
2. Gaussova eliminace
   - Řešení SLAR
   - Algoritmus Gaussovy eliminace

Úvod

Aby nedošlo k zmýlené a zklamání očekávání: to, co následuje, není učební text, ale pouze jakási pomocná berlička při pronikání do tajů lineární algebry a základů diferenciálního počtu funkce jedné proměnné. Většinou si to žádá slovní doprovod, který doplní chybějící. Anebo si vzít k ruce nějaká skripta.
V každém případě tento text sleduje osnovu přednášek.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

C. F. Gauss
byl velký německý matematik a fyzik, který je podepsán pod spoustou matematických a fyzikálních teorií, tvrzení, objevů. Ovlivnil mnoho disciplín - např. geometrii, matematickou analýzu, teorii čísel, astronomii, optiku...

My se budeme zabývat Gaussovou eliminační metodou řešení soustav lineárních algebraických rovnic (SLAR). Začneme příkladem.

Příklad: ▶ Vyřešte danou soustavu rovnic s neznámými $x,\ y$.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & -2 \\ 2x & - & 5y & = & 24 \end{array}$$

Řešení soustavy je každá dvojice (x, y), která splňuje obě rovnice. Jedna dvojice představuje jedno řešení. Řešení může být víc, nemusí však existovat žádné.

Metody řešení - dosazovací

1) Dosazovací metoda

Z první rovnice vyjádříme x : $\quad x = \dfrac{-2-2y}{3}$

a dosadíme do druhé rovnice: $\quad 2\dfrac{-2-2y}{3} - 5y = 24.$

Dostaneme jedinou rovnici pro y : $\quad \dfrac{-19}{3}y = -\dfrac{76}{3} \Rightarrow \; y = -4$

a dosadíme zpět do vztahu pro x. Získáme $x = 2$.

Soustava má tedy jediné řešení $\quad \boldsymbol{x} = (2, -4)$.

Metody řešení - eliminační

2) Eliminační metoda

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & = & -2 & /\cdot(-2) \\ 2x & - & 5y & = & 24 & /\cdot 3 \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & -2 \\ & - & 19y & = & 76 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$y = -4$ a dosazením do první rovnice: $3x - 8 = 2 \Rightarrow x = 2.$

Máme kupodivu opět jediné řešení, dokonce stejné $\boldsymbol{x} = (2, -4)$.

Elementární úpravy

Při řešení soustavy jsme používali úpravy (nazývají se elementární), které nemění množinu řešení soustavy. Jsou to:

- vzájemné přehození rovnic (jsme sice zatím nepoužili, ale, co není, bude)
- vynásobení rovnice nenulovým číslem
- přičtení násobku rovnice k jiné rovnici
- vyhození rovnice, která se opakuje.

Matice soustavy

Pro úpravy rovnic při eliminaci jsou podstatné koeficienty u neznámých a čísla na pravých stranách rovnic. Uspořádáme je do schematu, kterému budeme říkat matice*, resp. rozšířená matice soustavy.

Pro danou soustavu $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & -2 \\ 2x & - & 5y & = & 24 \end{array}$ je

matice soustavy $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, rozšířená matice soust. $\left[\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 24 \end{array}\right]$

Řádky matice odpovídají rovnicím, sloupce jsou koeficienty u stejné neznámé, svislou čarou je oddělen sloupec pravých stran.

∗ Zakladatelem teorie matic byl Arthur Cayley (1821 - 1895), anglický matematik.

Úpravy matice soustavy

Místo upravování rovnic, upravujeme řádky matice soustavy, ušetříme si tím něco psaní.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 24 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2 \\ 3 \end{array}\hookleftarrow \sim \left[\begin{array}{c} \text{k trojnásobku 2. řádku} \\ \text{přičteme minus} \\ \text{dvojnásobek 1. řádku} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -19 & 76 \end{array}\right]$$

Pro výslednou matici napíšeme odpovídající soustavu,

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & -2 \\ & - & 19y & = & 76 \end{array}$$, kterou již hravě vyřešíme. Dojdeme opět k starému známému řešení $\boldsymbol{x} = (2, -4)$.

Ještě jeden

Příklad: ▶ Vyřešte soustavu:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & & & + & 4x_4 & = & 5 \end{array}$$

Řešení: Napíšeme matici soustavy a upravíme ji.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{cc} -2 & -3 \\ \swarrow & \\ & \swarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{c} \text{K 2. řádku přičteme minus} \\ \text{dvojnásobek 1. řádku,} \\ \text{k 3. řádku přičteme minus} \\ \text{trojnásobek 1. řádku.} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Poslední řádek matice škrtáme, takže příslušná soustava je:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

Rovnic je nějak málo. Znamená to, že dvě neznámé můžeme libovolně volit. Můžeme si vybrat z těchto dvojic:

$x_1,\ x_3;\ \ x_2,\ x_3;\ \ x_1,\ x_4;\ \ x_2,\ x_4.$

Vybereme si dvojici poslední a označíme neznámé novými písmenky (není nutné), $x_4 = u,\ x_2 = v$. Vypočítáme zbývající neznámé.

$x_3 = \dfrac{5-u}{3},\ \ x_1 = -x_4 + x_3 - 2x_2 = -u + \dfrac{5}{3} - \dfrac{u}{3} - 2v = \dfrac{5}{3} - \dfrac{4}{3}u - 2v.$

Výsledné řešení můžeme zapsat:

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}u - 2v,\ v,\ \frac{5}{3} - \frac{u}{3},\ u\right)$$

Řešení je nekonečně mnoho a závisí na dvou parametrech.

Jiná volba parametrů: $x_3 = \tilde{u},\ x_2 = \tilde{v}$ vede na řešení ve tvaru

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (-5 + 4\tilde{u} - 2\tilde{v},\ \tilde{v},\ \tilde{u},\ 5 - 3\tilde{u})$$

Obě řešení musí představovat stejnou množinu, tj. pro konkrétní volbu např. $u = 1,\ v = 2$, pro níž $\boldsymbol{x} = \left(-\frac{11}{3}, 2, \frac{4}{3}, 1\right)$, musí existovat $\tilde{u},\ \tilde{v}$, které dávají stejný vektor řešení. Zde $\tilde{u} = \frac{4}{3},\ \tilde{v} = 2$.

Algoritmus Gaussovy eliminace

Cílem Gaussovy eliminace (GE) je dosáhnout toho, aby v levém dolním rohu matice soustavy byly nuly tak, abychom snadno vypočítali neznámé. Přesněji, aby v každém dalším řádku matice (počínaje druhým) bylo zleva alespoň o jednu nulu víc, než v předchozím řádku. Např. takhle (x zastupuje libovolné číslo)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{array}\right], \text{nebo taky takhle} \left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{array}\right], \text{nebo i jinak.}$$

Nejprve popíšeme proceduru, která vyrábí nuly pod nenulovým prvkem matice v daném sloupci. Budeme předpokládat, že nenulový prvek a je na místě kl.
Procedura sestává ze dvou kroků,.

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
k\text{–tý řádek} \rightarrow \\
\\
\\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x & \cdots & x & x & x & \cdots & x \\
 & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a & x & \cdots & x \\
0 & \cdots & 0 & b_1 & x & \cdots & x \\
 & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & b_n & x & \cdots & x
\end{array}\right] \sim
$$

$$
\begin{array}{c}
\uparrow \\
l\text{–tý sloupec}
\end{array}
$$

Procedura - nuly pod a

1. krok: Opíšeme prvních k řádků,

2. krok: ke (k+1). řádku přičteme $\dfrac{-b_1}{a}$ násobek k. řádku,

ke (k+2). řádku přičteme $\dfrac{-b_2}{a}$ násobek k. řádku, atd. a konečně

k poslednímu řádku přičteme $\dfrac{-b_n}{a}$ násobek k. řádku.

Výsledek je matice $\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} x & \cdots & x & x & x & \cdots & x \\ & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & x & \cdots & x \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & x & \cdots & x \\ & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & x & \cdots & x \end{array}\right]$

Algoritmus Gaussovy eliminace

G1: Položíme $k = 1, \quad l = 1$.

G2: a patří do místa kl. Je-li $a = 0$ a pod a nuly, zvětšíme l o jedničku ($l \to l + 1$) a opakujeme G2.

G3: Je-li $a = 0$ a pod ním nenulový prvek, prohodíme řádky tak, abychom namístě kl měli nenulový prvek.

G4: Provedem proceduru - nuly pod a .

G5: Nulový řádek, pokud existuje, vyhodíme.

G6: Zvětšíme k, l o jedničku a jdeme na G2.

Možnosti řešení

Jaké jsou možnosti řešení:

- Vyjde-li poslední řádek matice $(0\ 0\ \cdots\ 0\ |c)$, $c \neq 0$ tj. odpovídající rovnice je: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = c$, soustava nemá řešení.
- Vyjde-li po eliminaci stejně rovnic jako neznámých, soustava má jediné řešení.
- Vyjde-li p rovnic pro n neznámých, $p < n$ soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na r parametrech, kde $r = n - p$.