Posloupnosti

Počítání s nekonečny

$$\infty + \infty = \infty \qquad \infty \cdot \infty = \infty \qquad \frac{1}{\pm\infty} = 0^{\pm} \quad \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty \qquad (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

$$k \cdot \infty = +\infty, \quad \text{pro } k > 0 \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \qquad k^{\infty} = \infty, \quad \text{pro } k > 1$$

$$k \cdot \infty = -\infty, \quad \text{pro } k < 0 \qquad k^{\infty} = 0, \quad \text{pro } |k| < 1$$

Neurčité výrazy: $0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$

Příklad

Zjistěte, zda následující posloupnosti jsou (ne)rostoucí, (ne)klesající, omezené shora, zdola, omezené.

1) $\left\{\frac{5n-3}{2-3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

2) $\left\{\frac{2n+9}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3) $\left\{\frac{n^2+3}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$

5) $\left\{\frac{2n+3}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Výsledky:

1) Posloupnost je rostoucí, omezená; zdola svým prvním členem $a_1 = -2$, shora limitou -5/3.
2) Posloupnost je klesající a omezená; zdola limitou 2 a shora svým prvním členem $a_1 = 11/2$.
3) Posloupnost je klesající a omezená; zdola limitou 1 a shora svým prvním členem $a_1 = 2$.
4) Posloupnost je rostoucí, omezená pouze zdola svým prvním členem $a_1 = 2$.
5) Posloupnost je rostoucí, omezená; zdola svým prvním členem $a_1 = 5/3$, shora limitou 2.

Příklady na limity:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n-1} - \frac{2n^2}{n+1}\right)$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sqrt{n^2-3n}}{2n-1}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+3})$

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{2}}{n^2}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt[3]{n^2+4}}{(\sqrt{n}+2)^3}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{1+2+3+\cdots+n+(n+1)}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}$

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+4+\cdots+2^n}{2^n}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-2n)^2\,(n^3+3n+5)^3(1-5n-n^2)}{(2n^2+5n+4)^4\,(-n^5+2n^3-n^2+1)}$

Výsledky:

1) 1, **2)** neexistuje, **3)** $+\infty$, **4)** 1, **5)** $-\infty$, **6)** 1, **7)** -1/2, **8)** 1/2, **9)** 1, **10)** 1, **11)** 1/2, **12)** 1, **13)** 1/3, **14)** 2, **15)** 1/4.

V příkladech 11) - 14) budete potřebovat aritmetickou a geometrickou posloupnost.

Aritmetická posloupnost

$a_n = a_{n-1} + d$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Geometrická posloupnost

$a_n = a_{n-1}\cdot q$

$a_n = a_1\cdot q^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$