Limita funkce více proměnných

Helena Říhová

FBMI

26. září 2010

Obsah

Definice

▶ Je dána funkce $f: D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, bod A je hromadný bod D_f, může ale nemusí patřit do D_f. Řekneme, že funkce f má v bodě $A \in \mathbf{R}^n$ limitu $L \in \mathbf{R}$, jestliže ke $\forall\, U_\varepsilon(L)\ \exists$ okolí $\overset{\circ}{U}_\delta(A)$ tak, že pro $\forall\, X \in \overset{\circ}{U}_\delta(A) \cap D_f$ je $f(X) \in U_\varepsilon(L)$.

Tj. ke $\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tak, že pro $\forall\, X \in D_f; \quad 0 < d(X, A) < \delta$ je $|f(X) - L| < \varepsilon$.

Píšeme:
$$\lim_{X \to A} f(X) = L$$

Funkce má nejvýš jednu limitu! ◀

Věty o limitách

Věta o součtu, rozdílu, součinu a podílu limit je stejná jako u funkce jedné proměnné.

Věta ▶

1) Je-li f omezená na $\overset{\circ}{U}_\delta(A) \subset D_f$ a zároveň $\lim\limits_{X \to A} g(x) = 0$, pak

$$\lim_{X \to A} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

2) Nechť existuje $\lim\limits_{t \to b} h(t)$, $\lim\limits_{X \to A} f(X) = b$ a existuje $\overset{\circ}{U}_\delta(A)$, že pro $\forall\ X \in \overset{\circ}{U}_\delta(A)$ je $f(X) \neq b$. Pak

$$\lim_{X \to A} h(f(X)) = \lim_{t \to b} h(t).$$

◀

Příklad

Příklad: ▶ Určete $\lim\limits_{X \to O} \dfrac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$

Řešení:

$$\lim_{X \to O} \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \left[\begin{array}{c} t = x^2 + y^2 + z^2 \\ t \to 0 \end{array} \right] = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$ ◀

Spojitost

Definice

▶ Je dána funkce $f: D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$; $A \in D_f$. Řekneme, že f je spojitá v bodě A, jestliže ke $\forall U_\varepsilon(f(A))$ $\exists U_\delta(A)$ tak, že platí:
Je-li $X \in D_f \cap U_\delta(A) \Rightarrow f(X) \in U_\varepsilon(f(A))$.
Jinými slovy: ke $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tak, že pro $\forall X \in D_f$;
$d(X, A) < \delta$ je $|f(X) - f(A)| < \varepsilon$. ◀

Závěr: Funkce f je spojitá v bodě $A \in D_f$, právě když A je izolovaný bod D_f, nebo A je hromadný a $\lim_{X \to A} f(X) = f(A)$.

Parciální derivace

Definice

▶ Je dána funkce $z = f(x, y)$, bod $A = [a, b]$ je vnitřní bod definičního oboru. Potom parciální derivace funkce f podle proměnné x je

$$f'_x(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \quad \text{za předpokladu,}$$

že limita existuje.

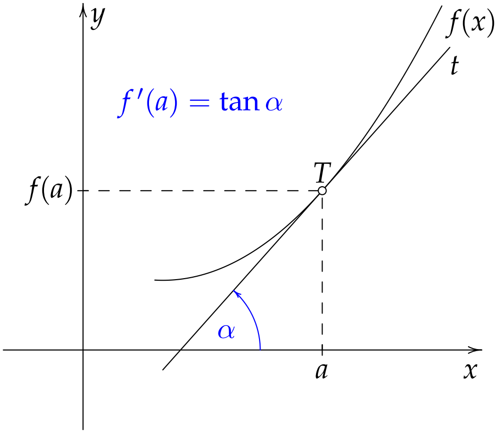
Podobně parciální derivace funkce f podle proměnné y je

$$f'_y(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}, \quad \text{za předpokladu,}$$

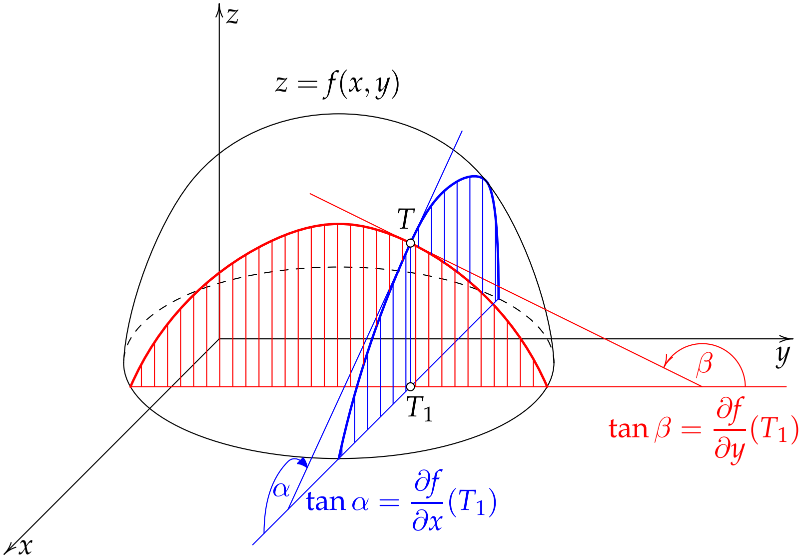
že limita existuje. ◀

Geometrický význam parciální derivace

U funkce jedné proměnné byla derivace $f'(x)|_{x=a}$ číselně rovna směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě a.



Geometrický význam parciální derivace



Geometrický význam parciální derivace,tečná rovina

Parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x je číselně rovna směrnici tečny ke grafu funkce ve směru osy x, podobně pro proměnnou y, viz obrázek.

Tečná rovina, totální diferenciál

Definice

▶ Předpokládáme, že funkce $f(x,y)$ je definována v nějakém okolí bodu $A[a,b]$. Říkáme, že

$z = p(x-a) + q(y-b) + f(a,b), \quad p,\ q \in \mathbf{R}$ je tečná rovina

k ploše $z = f(x,y)$ v bodě $T[a,b,f(a,b)]$, jestliže

$$\lim_{X\to A} \frac{r(x,y)}{d(X,A)} = 0, \text{ kde } r(x,y) = f(x,y) - f(a,b) - p(x-a) - q(y-b).$$ ◀

Definice

▶ Předpokládáme, že funkce $f(x,y)$ je definována v nějakém okolí bodu $A[a,b]$. Říkáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A (má v bodě A totální diferenciál), jestliže existuje lineární funkce

$p(x-a) + q(y-b), \quad p,\ q \in \mathbf{R}$ taková, že funkce $r(x,y)$, definovaná výše, splňuje

$$\lim_{X \to A} \frac{r(x,y)}{d(X,A)} = 0.$$

Pak funkci $p(x-a) + q(y-b)$ nazýváme totální diferenciál funkce f v bodě A a značíme $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}f(X,A)$.

$$\mathrm{d}f(X,A) = p(x-a) + q(y-b), \quad p,\ q \in \mathbf{R}.$$

Platí

Má-li plocha $z = f(x,y)$ v bodě $T[a,b,f(a,b)]$ tečnou rovinu (nikoli rovnoběžnou s osou z), pak má funkce $z = f(x,y)$ v bodě $A[a,b]$ totální diferenciál a naopak.

Totální diferenciál

Věta ▶ Nechť funkce f má v bodě A totální diferenciál, pak je v bodě A spojitá. ◀

Věta ▶ Nechť funkce f má v bodě A totální diferenciál, pak má v bodě A parciální derivace a platí:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}(A), \qquad \text{tj.}$$

$$\mathrm{d}f(X, A) = f'_x(A)(x-a) + f'_y(A)(y-b).$$

◀

Totální diferenciál

Věta ▶ Necht' funkce f má v $U_\delta(A)$ parciální derivace $f'_x(X)$, $f'_y(X)$ a tyto derivace jsou spojité v A. Pak má f v bodě A totální diferenciál (je v bodě A diferencovatelná). ◀

Platí

Totální diferenciál můžeme psát ve tvaru

$$\mathrm{d}f(X,A) = f'_x(A)\mathrm{d}x + f'_y(A)\mathrm{d}y, \quad \text{přičemž } \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y$$

jsou totální diferenciály funkcí $\varphi(x,y) = x$, $\psi(x,y) = y$.

Derivace složené funkce

Věta ▶ Nechť f, g mají totální diferenciál v bodě A, nechť h má totální diferenciál v bodě $B = [f(A), g(A)]$. Pak složená funkce $h(f, g)$ má totální diferenciál v bodě A a platí

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \frac{\partial z}{\partial u}(B)\,\frac{\partial u}{\partial x}(A) + \frac{\partial z}{\partial v}(B)\,\frac{\partial v}{\partial x}(A)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(A) = \frac{\partial z}{\partial u}(B)\,\frac{\partial u}{\partial y}(A) + \frac{\partial z}{\partial v}(B)\,\frac{\partial v}{\partial y}(A)$$

kde $z = h(u, v)$, $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ ◀

Použitá literatura

[1] J. Hamhalter, J. Tišer: Diferenciální počet funkcí více proměnných, skriptum ČVUT, 2005

[2] J. Hamhalter, J. Tišer: Integrální počet funkcí více proměnných, skriptum ČVUT, 2005

[3] L. Průcha: Řady, skriptum ČVUT, 2005