Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je integrální transformace definovaná vztahem:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \quad \text{kde funkce} \begin{cases} f(t):\ \langle 0;\infty) \rightarrow \mathbf{R} & \text{je předmět,} \\ F(p);\ p \in \mathbf{C} & \text{je obraz.} \end{cases}$$

Značení

$$\begin{array}{lcl} F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\} & \text{stručně} & F(p) \triangleq f(t) \\ f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} & & f(t) \triangleq F(p) \end{array}$$

Vlastnosti

Přímá i zpětná Laplaceova transformace jsou lineární:

$$\mathscr{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{a\,F(p) + b\,G(p)\} = a\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} + b\mathscr{L}^{-1}\{G(p)\}$$

Základní vztahy $\mathscr{L}$-transformace

Předmět	Obraz
$f(t)$	$F(p)$
$f(t)\,\mathrm{e}^{at}$	$F(p-a)$ posunutí v obrazu
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ změna měřítka
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$tf(t)$	$-F'(p)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q$
$\int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$	$\frac{1}{p}F(p)$

Konvoluce funkcí $f(t)$, $g(t)$:

$$(f * g)(t) = (g * f)(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, \mathrm{d}u = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, \mathrm{d}u$$

$$\mathscr{L}\{f * g\} = F(p) \cdot G(p), \ \text{ kde } F(p) \triangleq f(t),\ G(p) \triangleq g(t)$$

Tabulka obrazů pro dané předměty

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
1	$\frac{1}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}} \quad n \in N$	$\cosh \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\,\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\mathrm{e}^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t^2\mathrm{e}^{at}$	$\frac{2}{(p-a)^3}$	$\mathrm{e}^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$t^n\mathrm{e}^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\mathrm{e}^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$

Příklady: Pro daný předmět $f(t)$ určete obraz $F(p)$.

1. $f(t) = 1 + 4t\mathrm{e}^{-t} + 5t^2\mathrm{e}^{2t}$ $\quad \left[F(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{(p+1)^2} + \frac{5 \cdot 2}{(p-2)^3}\right]$
2. $f(t) = 2\cos 3t - 3\sin 2t$ $\quad \left[F(p) = 2\frac{p}{p^2+9} - 3 \cdot \frac{2}{p^2+4}\right]$
3. $f(t) = t^3 - 4\sin 3t + t\mathrm{e}^{-2t}$ $\quad \left[F(p) = \frac{3!}{p^4} - \frac{4 \cdot 3}{p^2+9} + \frac{1}{(p+2)^2}\right]$
4. $f(t) = 5\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-4t} - 3\sin 3t$ $\quad \left[F(p) = 5 \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+4} - 3 \cdot \frac{3}{p^2+9}\right]$
5. $f(t) = t(\sin 3t - \cos 3t)$ $\quad \left[F(p) = \frac{6p}{(p^2+9)^2} - \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}\right]$

6. $f(t) = (t^2 + 2t - 3)\mathrm{e}^{-2t}$ $\left[F(p) = \dfrac{2}{(p+2)^3} + \dfrac{2}{(p+2)^2} - \dfrac{3}{p+2}\right]$

7. $f(t) = (t+2)\sin 4t$ $\left[F(p) = \dfrac{2p \cdot 4}{(p^2+16)^2} + \dfrac{8}{p^2+16}\right]$

8. $f(t) = 3\mathrm{e}^{-2t}\sin 7t$ $\left[F(p) = 3 \cdot \dfrac{7}{(p+2)^2+49}\right]$

9. $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}(2\cos 3t - \sin 3t)$ $\left[F(p) = 2 \cdot \dfrac{p+2}{(p+2)^2+9} - \dfrac{3}{(p+2)^2+9}\right]$

10. $f(t) = 3\sin 3t \cdot \cos t$ $\left[F(p) = \dfrac{6}{p^2+16} + \dfrac{3}{p^2+4}\right]$[1]

Zpětná Laplaceova transformace

Předpokládáme, že obraz $F(p)$ je ryze lomená racionální funkce a hledáme předmět $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$.

Postup Funkci $F(p)$ rozložíme na parciální zlomky typu:

$$\frac{A}{(p-a)^n},\ n \in N\,; \quad \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2}; \quad \frac{Ap+B}{(p-a)^2+\omega^2}\,; \quad \frac{Ap+B}{(p^2+\omega^2)^2}\,; \quad \frac{Ap+B}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$$

a k jednotlivým zlomkům najdeme předměty za pomoci níže uvedené tabulky.

Příklady: S použitím tabulky určete předmět $f(t)$ k danému obrazu $F(p)$.

1. $F(p) = \dfrac{2p-3}{p^2+3p+2}$

   Řešení: $F(p)$ rozložíme na parciální zlomky.

   $F(p) = \dfrac{2p-3}{(p+2)(p+1)} = \dfrac{A}{p+2} + \dfrac{B}{p+1}$

   $\Rightarrow \quad 2p - 3 = A(p+1) + B(p+2)$. Dosadíme nulové body jmenovatele

   $p = -2: \quad -7 = -A \Rightarrow \ A = 7$
   $p = -1: \quad -5 = B$

   $F(p) = \dfrac{7}{p+2} - \dfrac{5}{p+1}$ a podle tabulky je $f(t) = 7\mathrm{e}^{-2t} - 5\mathrm{e}^{-t}, \ \ t \geq 0.$

2. $F(p) = \dfrac{p^2+1}{p^3-p^2-6p}$ $\left[f(t) = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{3t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]$

3. $F(p) = \dfrac{9-3p}{p^3+9p}$ $[f(t) = 1 - \cos 3t - \sin 3t]$

4. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$ $\left[f(t) = \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{t}(3t-1) + \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{-2t}\right]$

[1] *v příkladu použijte vztah:* $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

Tabulka předmětů k daným obrazům

$a \in \mathbf{R},\ b > 0,\ \omega > 0.$

$F(p)$	$f(t)$
$\dfrac{1}{p-a}$	e^{at}
$\dfrac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
$\dfrac{1}{(p-a)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{at}$
$\dfrac{1}{(p-a)^n}\,,\ n \in N$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
$\dfrac{1}{p^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t$
$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$\dfrac{1}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}e^{at}\sin\omega t$
$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos\omega t$
$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$
$\dfrac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}t\sin\omega t$
$\dfrac{1}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}e^{at}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$
$\dfrac{p}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}e^{at}(\omega^2 t\sin\omega t + a\ \sin\omega t - a\omega t\cos\omega t)$

Lineární diferenciální rovnice řešené Laplaceovou transformací

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je možné řešit Laplaceovou trasformací, která danou diferenciální rovnici pro neznámou funkci $y(t)$ převádí na lineární algebraickou rovnici pro obraz $y(t)$. Ukážeme si to na příkladech.

Příklad 1 Na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$ nalezněte řešení dané diferenciální rovnice vyhovující zadané počáteční podmínce.

$$y' + 4y = \sin 2t\,; \quad y(0^+) = 3.$$

Řešení

Obraz řešení označíme $Y(p) \triangleq y(t)$, obraz derivace $y'(t) \triangleq p\,Y(p) - y(0^+) = p\,Y(p) - 3$ a

$\sin 2t \triangleq \dfrac{2}{p^2+4}$. Obraz zadané rovnice je pak:

$$\begin{aligned} p\,Y(p) - 3 + 4Y(p) &= \frac{2}{p^2+4}, \quad \text{vypočteme } Y(p) \\ (p+4)\cdot Y(p) &= \frac{2}{p^2+4} + 3 \\ Y(p) &= \frac{2}{(p^2+4)(p+4)} + \frac{3}{p+4} \end{aligned}$$

Pro zpětnou transformaci rozložíme první zlomek na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(p^2+4)(p+4)} &= \frac{A}{p+4} + \frac{Bp+C}{p^2+4} \\ \text{vyjde} \quad \frac{2}{(p^2+4)(p+4)} &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+4} - \frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{5\,(p^2+4)} \\ \text{takže} \quad Y(p) &= \frac{31}{10\,(p+4)} - \frac{p}{10\,(p^2+4)} + \frac{2}{5\,(p^2+4)} \end{aligned}$$

a hledané řešení (předmět k vypočtenému obrazu) je:

$$y(t) = \frac{31}{10}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t\,.$$

<u>Příklad</u> 2 Vyřešte rovnici:

$$y'' + 2y' + 2y = 0\,; \quad y(0^+) = 1,\ \ y'(0^+) = 2$$

<u>Řešení</u>

Zopakujeme postup z předchozího příkladu.

Označíme $Y(p) \triangleq y(t)$,

obraz I. derivace $y'(t) \triangleq pY(p) - 1$,

obraz II. derivace $y''(t) \triangleq p^2Y(p) - p - 2$ a obraz zadané rovnice je:

$$\begin{aligned} p^2Y(p) - p - 2 + 2(p\,Y(p) - 1) + 2Y(p) &= 0 \\ (p^2+2p+2)Y(p) &= p+4 \\ \text{z toho} \quad Y(p) &= \frac{p+4}{p^2+2p+2}. \end{aligned}$$

Upravíme

$$Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{3}{(p+1)^2+1}$$

a k vypočítanému obrazu najdeme předmět, tj. řešení zadané rovnice

$$y(t) = (\cos t + 3\sin t)\mathrm{e}^{-t}\,.$$

<u>Příklad</u> 3a) Vyřešte rovnici:

$$y'' + 9y = 3\cos 3t; \quad y(0^+) = 0,\ y'(0^+) = 3$$

Řešení

Provedeme Laplaceovu transformaci

$$\begin{aligned} Y(p) &\triangleq y(t) \\ y''(t) &\triangleq p^2Y(p) - 0 - 3 \\ p^2Y(p) - 3 + 9Y(p) &= 3 \cdot \frac{p}{p^2+9} \qquad \text{z toho} \\ Y(p) &= \frac{3p}{(p^2+9)^2} + \frac{3}{p^2+9} \qquad \text{a zpětnou transformací} \\ \text{získáme hledané řešení} \quad y(t) &= \left(1 + \frac{t}{2}\right) \sin 3t \end{aligned}$$

Příklad 3b) (Jiný způsob řešení.)

Pro porovnání vyřešíme rovnici z příkladu 3a) metodou neurčitých koeficientů.

Řešení

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 3\,\mathrm{i}$

$\Rightarrow$ obecné řešení příslušné homogenní rovnice je

$$y_p(t) = a\cos 3\,t + b\sin 3\,t, \quad \text{kde} \ \ a,\, b \in \mathbf{R}\,.$$

Partikulární řešení rovnice s pravou stranou předpokládáme ve tvaru:

$$y_p(t) = c\,t\cos 3\,t + d\,t\sin 3\,t$$

koeficienty c, d spočítáme dosazením y_p a y_p'' do původní rovnice $y'' + 9y = 3\cos 3\,t$ a porovnáním koeficientů u lineárně nezávislých funkcí $\cos 3\,t$, $\sin 3\,t$.

$$y_p''(t) = -6c\sin 3\,t - 9ct\cos 3\,t + 6d\cos 3\,t - 9dt\sin 3\,t\ ,$$

Dosadíme:

$$-6\,c\ \sin 3\,t - 9\,c\,t\ \cos 3\,t + 6\,d\ \cos 3\,t - 9\,d\,t\ \sin 3\,t + 9\,c\,t\cos 3\,t + 9\,d\,t\sin 3\,t = 3\cos 3\,t,$$

upravíme

$$-6\,c\ \sin 3\,t + 6\,d\ \cos 3\,t = 3\cos 3\,t$$

a porovnáme koeficienty u $\cos 3\,t$, $\sin 3\,t$. Získáme hodnoty c, d.

$$\left.\begin{aligned} \cos 3t: &\quad 6d = 3 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{2} \\ \sin 3t: &\quad -6c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_p = \frac{t}{2}\ \sin 3\,t.$$

Obecné řešení zadané rovnice je pak

$$y(t) = a\cos 3\,t + \left(b + \frac{t}{2}\right)\ \sin 3\,t\ .$$

Hodnoty a, b dostaneme z počátečních podmínek

$$\begin{aligned} y(0^+) = 0 &\quad\Rightarrow\quad a = 0 \\ y'(0^+) = 3 &\quad\Rightarrow\quad \left[\frac{1}{2}\sin 3t + \left(b + \frac{1}{2}t\right) 3\cos 3t\right]_{t=0} = 3 \\ \Rightarrow \quad 3b = 3 &\quad\Rightarrow\quad b = 1\ . \end{aligned}$$

A máme řešení zadané rovnice vyhovující daným počátečním podmínkám:

$$y = \left(1 + \frac{t}{2}\right) \sin 3t\ .$$

Neřešené příklady

Vyřešte diferenciální rovnice s uvedenými počátečními podmínkami.

1. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ $\quad \left[y(t) = (\cos t - 2\sin t)\,\mathrm{e}^{t}\right]$
2. $y'' + 2y' = 1 + 2t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ $\quad \left[y(t) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2t} - 1 + t^2)\right]$
3. $y'' - y' - 6y = 2, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ $\quad \left[y(t) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{2}{15}\mathrm{e}^{3t}\right]$
4. $y'' - y' - 2y = 2t - 3, \quad y(0) = \dfrac{15}{4},\ y'(0) = \dfrac{13}{4}$ $\quad \left[y(t) = 2\,\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} - t + 2\right]$
5. $y'' - 9y = 26\mathrm{e}^{2t}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -2$ $\quad \left[y(t) = \mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{3t} + 2\mathrm{e}^{2t}\right]$