Křivkový integrál I. druhu

a) Pro křivku v R^2 danou explicitně: $y = g(x)$; $x \in \langle a, b\rangle$

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}l = \int_a^b f(g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

b) Pro křivku danou parametricky: $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}l = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\dot\varphi(t))^2+(\dot\psi(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Příklady

1. Zapište alespoň 2 parametrizace následujících křivek:
   (a) Úsečka $AB,\ A[2,5],\ B[-1,3]$
   (b) Dolní půlkružnice $x^2+y^2=9$
   (c) Pravá polovina elipsy $4x^2+y^2=4$
   (d) Prostorová křivka $x^2+y^2+z^2=19\,,\ x\ge 0\,,\ z\ge 0\,,\ y=\sqrt{3}$

   Výsledky:

   (a) Např. $x = 2-3t$, $y = 5-2t,\ t\in\langle 0,1\rangle$ nebo $x = t$, $y = \frac{2}{3}t+\frac{11}{3},\ t\in\langle -1,2\rangle$

   (b) Např. $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t,\ t\in\langle \pi, 2\pi\rangle$ nebo $x = t$, $y = -\sqrt{1-t^2},\ t\in\langle -3,3\rangle$

   (c) Např. $x = \cos t$, $y = 2\sin t,\ t\in\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$ nebo $x = \sqrt{1-\frac{t^2}{4}}$, $y = t,\ t\in\langle -2,2\rangle$

   (d) Např. $x = 4\cos t$, $y = \sqrt{3}$, $z = 4\sin t,\ t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ nebo $x = t$, $y = \sqrt{3}$, $z = \sqrt{16-t^2},\ t\in\langle -4,4\rangle$

2. Určete délku následujících křivek:
   (a) Asteroidy: $x = a\,\cos^3 t,\ y = a\,\sin^3 t,\ t\in\langle 0,2\pi\rangle$ [$6a$]
   (b) Kardioidy: $r = a(1+\cos\varphi),\ r,\varphi$ jsou polární souřadnice [$8r$]
   (c) Jedné větve cykloidy $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$ [$8a$]
   (d) Jednoho závitu šroubovice: $x = a\,\cos t,\ y = a\,\sin t,\ z = b\,t,\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$ [$2\pi\sqrt{a^2+b^2}$]

3. Vypočítejte následující integrály:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}l, \quad \text{kde } \Gamma \text{ je obvod } \triangle ABC,\ A[0,0],\ B[0,2],\ C[1,0]$ $\left[\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}\right]$

(b) $\displaystyle\int_\Gamma xy\,\mathrm{d}l, \quad \text{kde } \Gamma = \left\{[x,y] \in R^2,\ \tfrac{x^2}{9} + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ $\left[\dfrac{13}{4}\right]$

(c) $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}l, \quad \text{kde } \Gamma = \{[x,y,z] \in R^3,\ x^2+y^2+z^2 = 4,\ x = y,\ x \leq 0,\ z \geq 0\}$

$[2\pi]$

4. Určete souřadnice těžiště horní poloviny kružnice $x^2 + y^2 = x$, jestliže její délková hustota $\lambda(x,y)$ je přímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku.

Návod: $x_T = \dfrac{S_y}{m},\ \ y_T = \dfrac{S_x}{m}$

$$S_y = \int_\Gamma x\lambda(x,y)\,\mathrm{d}l,\ S_x = S_y(x \leftrightarrow y)$$

$$m = \int_\Gamma \lambda(x,y)\,\mathrm{d}l$$

$T\left[\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$

5. Určete těžiště $\triangle ABC$, $A[3,2]$; $B[1,4]$; $C[-1,-2]$; přesvědčte se, že těžiště je průsečík těžnic.

$T\left[1, \dfrac{4}{3}\right]$