Křivkový integrál II. druhu (vektorového pole)

1. pro orientovanou křivku v R^3 zadanou parametricky:
   $x_1 = \varphi_1(t),\ \ x_2 = \varphi_2(t)\,,\ x_3 = \varphi_3(t),\ \ t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

   $$\int_\Gamma \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{3} F_i\,\mathrm{d}x_i = \pm \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^{3} F_i \cdot \dot{\varphi}_i(t)\,\mathrm{d}t$$

   $+\quad \longrightarrow$ souhlasná orientace křivky s danou parametrizací
   $-\quad \longrightarrow$ nesouhlasná orientace křivky s danou parametrizací

2. pro explicitně zadanou křivku v R^2 : $\ y = g(x),\ \ x \in \langle a, b \rangle$

   $$\int_\Gamma \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_\Gamma F_1(x,y)\,\mathrm{d}x + F_2(x,y)\,\mathrm{d}y = \pm \int_a^b (F_1(x,g(x)), F_2(x,g(x))) \cdot (1, g'(x))\,\mathrm{d}x =$$

   $$= \pm \int_a^b (F_1(x,g(x)) + F_2(x,g(x)) \cdot g'(x))\,\mathrm{d}x.$$

   $+\quad \longrightarrow$ souhlasná orientace křivky s danou parametrizací
   $-\quad \longrightarrow$ nesouhlasná orientace křivky s danou parametrizací

Aplikace

$\int_\Gamma \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = A =$ práce síly $\vec{F}$ po křivce Γ.

Greenova věta:

Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast s hranicí Γ, kladně orientovanou vzhledem k Ω a funkce $P(x,y),\ Q(x,y),\ \dfrac{\partial Q}{\partial x},\ \dfrac{\partial P}{\partial y}$ jsou spojité v Ω.

Pak platí: $\displaystyle\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Příklady

1. $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y,$ kde Γ je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $[-1,1]$ a koncovým $[1,1]$. $\left[-\dfrac{14}{15}\right]$

2. $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y,$ kde Γ je část grafu $y = |x|$ s počátečním bodem $[-1,1]$ a koncovým $[1,1]$. $[2]$

3. $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, kde Γ je kladně orientovaná kružnice v rovině xy se středem v počátku a poloměrem r. $[-2\pi r]$

4. $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} (x-y)\,\mathrm{d}y$, kde Γ je orientovaný obvod $\triangle ABC$; $A[0,0]$, $B[1,0]$, $C[0,1]$. $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

5. $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{-y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, kde Γ je čtvrtina asteroidy o rovnici $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, ležící v I. kvadrantu s počátečním bodem $[a,0]$ a koncovým $[0,a]$. $\left[\dfrac{3\pi a^{\frac{4}{3}}}{16}\right]$

6. $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} 9x^2y^2\,\mathrm{d}x - 6x^3y\,\mathrm{d}y$, kde Γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=x$. $[0]$