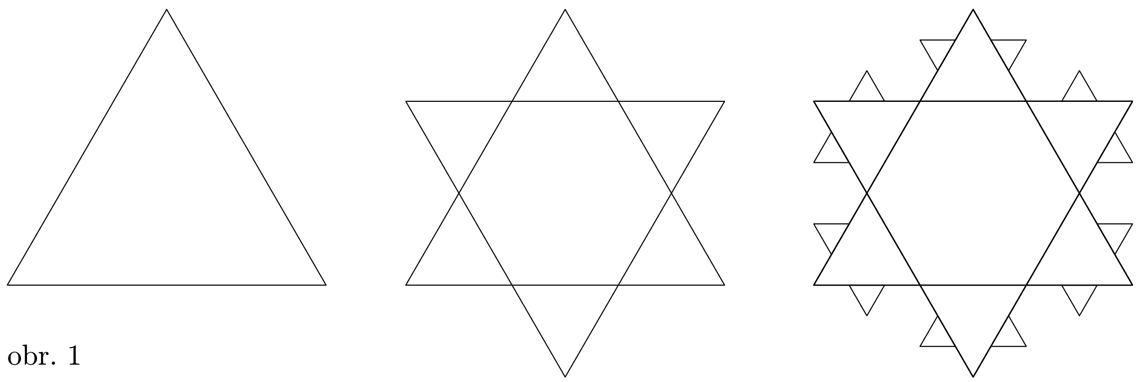
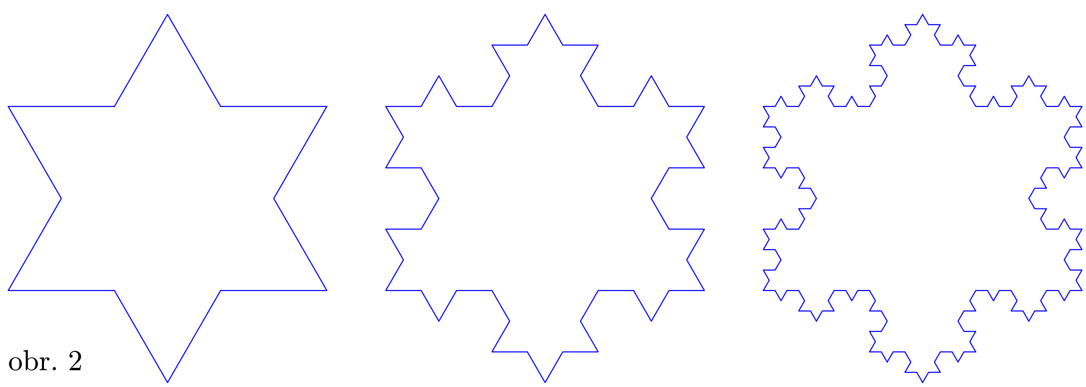
Kochova vločka a geometrická řada

S geometrickou řadou se setkáme leckde. Díky ní Achilles hravě dohoní želvu (ve Starém Řecku řady neznaje s tím měl velké potíže), na účtech nám naskakují úroky a pan Helge von Koch nás zasypává svými vločkami.
A u vloček zůstaneme. Mají totiž pozoruhodnou vlastnost. Ač jejich obsah je konečný, obvod mají nekonečný. Jak vznikají, je naznačeno na obrázku 1, obrysy jsou na obrázku 2.



obr. 1

Vyjdeme z rovnostranného trojúhelníku o straně a. Nad středem každé jeho strany sestrojíme opět rovnostranný trojúhelník o straně $a_1 = a/3$ (dostaneme židovskou hvězdu). Nad středem každé její strany (je jich 12) sestrojíme další trojúhelníček o straně $a_2 = a_1/3 = a/9$. Vzniklý útvar bude mít 48 stran. Takhle pokračujeme neomezeně dál. Každá další iterace vločky má čtyřikrát víc stran než iterace předchozí a strany jsou třikrát menší.



obr. 2

Při výpočtu obvodu a obsahu vločky sledujeme postup jejího vznikání. Obvod je vyjádřen nekonečným součtem:

$$o = 3a + 3 \cdot \frac{a}{3} + 12 \cdot \frac{a}{9} + 48 \cdot \frac{a}{27} + \ldots = 3a + a\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \ldots\right),$$

kde první člen je obvod původního trojúhelníku a další členy ukazují o kolik se s každou novou iterací obvod zvětšil. Geometrická řada v závorce má kvocient $q = 4/3$, tedy diverguje ($q > 1$)

k nekonečnu. Obvod je proto nekonečně veliký.

Obsah vločky počítáme podobně. Obsah původního trojúhelníku označíme P_0, $P_0 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Obsah vločky je pak:

$$P = P_0 + 3 \cdot \frac{P_0}{9} + 12 \cdot \frac{P_0}{9^2} + 48 \cdot \frac{P_0}{9^3} + \ldots = P_0 + \frac{P_0}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \ldots\right) =$$

$$= \left\lfloor \text{v závorce je geometrická řada s kvocientem} \quad q = \frac{4}{9} \right\rceil = P_0 + \frac{P_0}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5} P_0.$$

Dosazením za P_0 máme:

$$P = \frac{2a^2\sqrt{3}}{5}.$$

Získaná hodnota by měla být menší než obsah kružnice opsané původnímu trojúhelníku $P_k = \frac{1}{3}\pi a^2$, což skutečně je (jukni na obrázek).