Funkce více proměnných - úvod

Helena Říhová

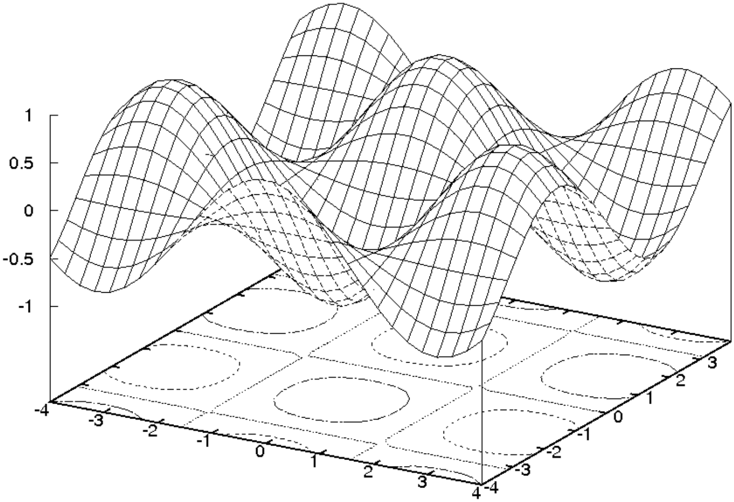
FBMI

14. července 2014

Obsah

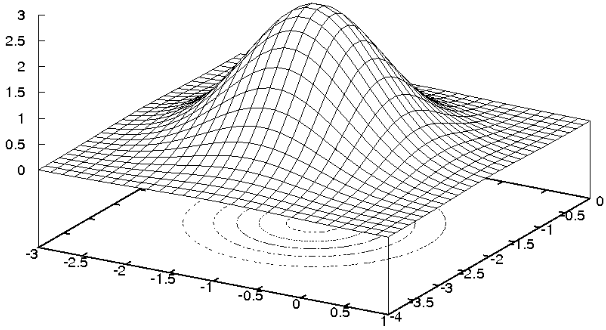
Graf funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = \cos x \cdot \sin y$$



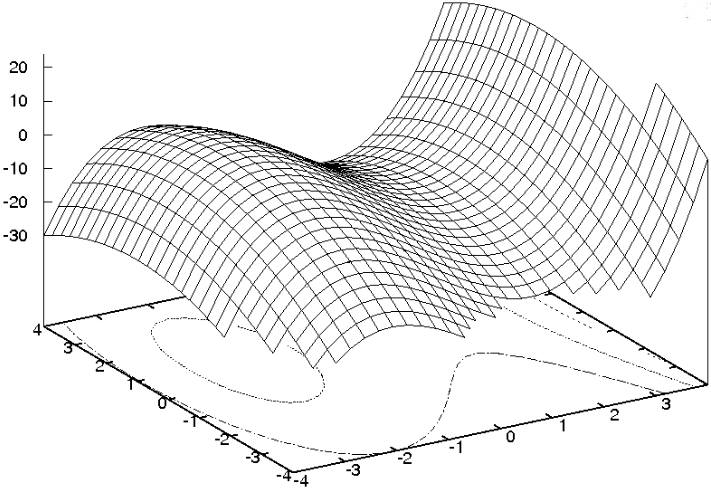
Graf funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2-2x-4y-4}$$



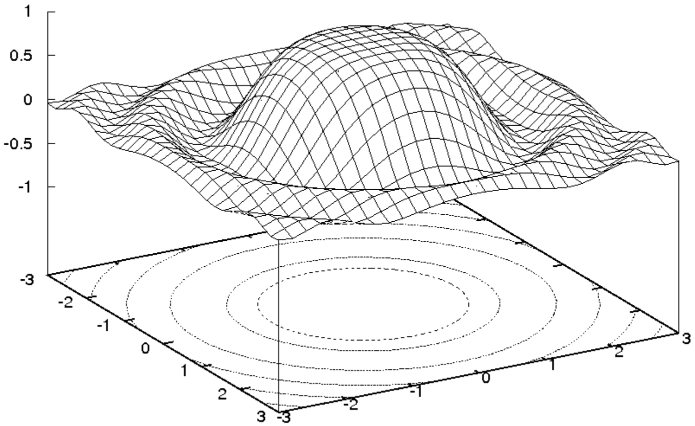
Graf funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2 - 9x + 2y - 10$$



Graf funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$



Eukleidovská vzdálenost

Definice

- Nechť $X\,[x_1, \ldots, x_n]$, $Y\,[y_1 \ldots, y_n]$ jsou body z $\mathbf{R}^n$. Potom jejich vzdálenost $d(X,Y)$ je nezáporné číslo

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Vlastnosti $d(X,Y)$

1) $d(X,Y) \geq 0,\ d(X,Y) = 0 \ \Leftrightarrow\ X = Y,$

2) $d(X,Y) = d(Y,X)$

3) $d(X,Y) + d(Y,Z) \geq d(X,Z)$

Okolí bodu, vnitřní bod množiny, otevřená množina

Definice

▶ Sférické δ- okolí bodu A, $A \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$, je množina

$U_\delta(A) = \{\forall\, X,\ X \in \mathbf{R}^n;\ d(X, A) < \delta\}$,

Je-li $0 < d(X, A) < \delta$, mluvíme o prstencovém δ-okolí bodu A a značíme je $\overset{\circ}{U}_\delta(A)$. ◀

Definice

▶ Máme množinu $M \subset \mathbf{R}^n$. Bod $A \in M$ je vnitřní bod M, jestliže existuje okolí $U_\delta(A)$ takové, že $U_\delta(A) \subset M$. ◀

Definice

▶ Množina M je otevřená, je-li každý bod $A \in M$ vnitřním bodem M. ◀

Vnitřek množiny, hromadný bod množiny

Vnitřek množiny M je množina všech vnitřních bodů M. Je to otevřená množina.

Definice

► Máme množinu $M \subset \mathbf{R}^n$, bod $A \in \mathbf{R}^n$ (bod A může a nemusí ležet v M). A je hromadný bod množiny M, jestliže v každém jeho okolí existuje alespoň jeden bod $X \in M, X \neq A$. ◄

Uzavřená množina je taková, kdy každý hromadný bod množiny do ní patří. (Uzavřená množina obsahuje všechny své hromadné body.)

Hraniční bod množiny, izolovaný bod množiny

Definice

▶ Máme množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ a bod $A \in \mathbf{R}^n$ A je hraniční bod množiny M, jestliže každé jeho okolí obsahuje alespoň jeden bod M a alespoň jeden bod z $\mathbf{R}^n \setminus M$. ◀

Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá hranice M.

Definice

▶ Máme množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ a bod $A \in M$. A je izolovaný bod množiny M, jestliže existuje prstencové okolí bodu A, které neobsahuje žádný bod M. ◀

Definice funkce $f: D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

Definice

▶ Reálná funkce n reálných proměnných $f: D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je předpis, který každému bodu $X[x_1, \ldots, x_n] \in D_f$ přiřazuje jedinou hodnotu $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}$.

Množina D_f je definiční obor funkce; bývá zadán, nebo je to maximální množina, na které je funkční předpis definován.
$H_f = \{f(X);\ X \in D_f\}$ je obor hodnot funkce na množině D_f. ◀

Příklad: ▶ Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

$f: \quad f(x, y) = x^2 + y^2$ (U funkcí dvou a tří proměnných obvykle nepoužíváme indexů.)

$D_f = \mathbf{R}^2,\ H_f = \mathbf{R}_o^+$. ◀

Příklad: ▶ Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

$f: \quad f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Musí platit: $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \;\Rightarrow\;$ D_f je tvořen koulí o poloměru 1, včetně hranice. $H_f = \langle 0,\ 1 \rangle$. ◀

Definice

▶ Graf funkce $f: D_f \to \mathbf{R},\ D_f \subset \mathbf{R}^n$ je množina $G_f = \{[x_1, \ldots, x_n, f(X)]\},\ X = [x_1, \ldots, x_n]$. $G_f \subset \mathbf{R}^{n+1}$. ◀

Vrstevnice (konstantní hladina, ekvipotenciála) je množina bodů $[x,y]$, pro které $f(x,y) = konst$.

Příklad: ▶ Popište graf funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2-2x-4y-4}$

Řešení: $D_f = \mathbf{R}^2,\ H_f \subset \mathbf{R}^+$

vrstevnice:

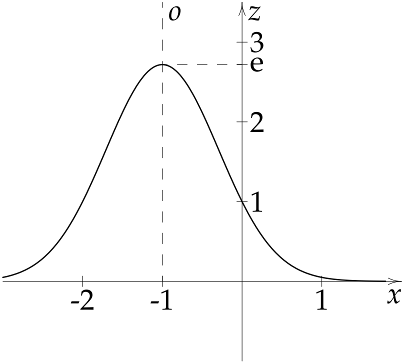
$$
\begin{aligned}
-x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 &= -(x+1)^2 - (y+2)^2 + 1 \\
\exp(-(x+1)^2 - (y+2)^2 + 1) &= c \\
-(x+1)^2 - (y+2)^2 + 1 &= \ln c \\
(x+1)^2 + (y+2)^2 &= -\ln c + \ln \mathrm{e} \\
(x+1)^2 + (y+2)^2 &= \ln \frac{\mathrm{e}}{c}, \quad \text{kde } \frac{\mathrm{e}}{c} \geq 1 \ \Rightarrow \\
0 < c \leq \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

Poslední rovnice představuje soustavu kružnic se středem $S[-1,-2]$ a $r = \sqrt{\ln \frac{\mathrm{e}}{c}}$. Obor hodnot jsou přípustné hodnoty c, tj $H_f = (0, \mathrm{e}\rangle$. Graf (plocha) vznikne rotací jisté křivky kolem osy rovnoběžné s osou z a procházející bodem $[-1,-2]$. Křivka je průnik plochy s libovolnou rovinou kolmou k rovině xy a procházející osou rotace.

Pokračování příkladu

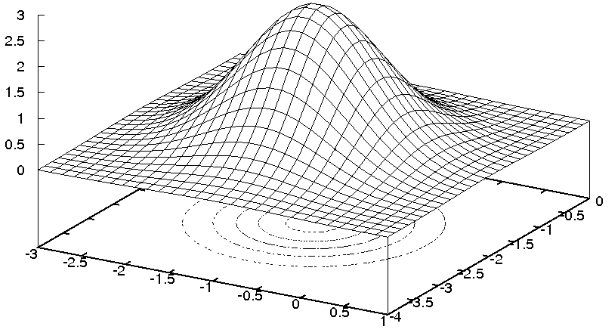
Např. rovina $y = -2$ řízne plochu v křivce:

$$z = f(x,-2) = \mathrm{e}^{-x^2-4-2x+8-4} \text{ tj. } f(x,-2) = \mathrm{e}^{-(x+1)^2+1}$$



Graf funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2-2x-4y-4}$$



Literatura

[1] J. Hamhalter, J. Tišer: Diferenciální počet funkcí více proměnných, ČVUT 2005

[2] J. Škrášek, Z. Tichý: Základy aplikované matematiky, SNTL Praha 1983

[3] M. Nekvinda: Matematika II, TU Liberec 2000