Funkce

Helena Říhová

FBMI

5. října 2012

Obsah

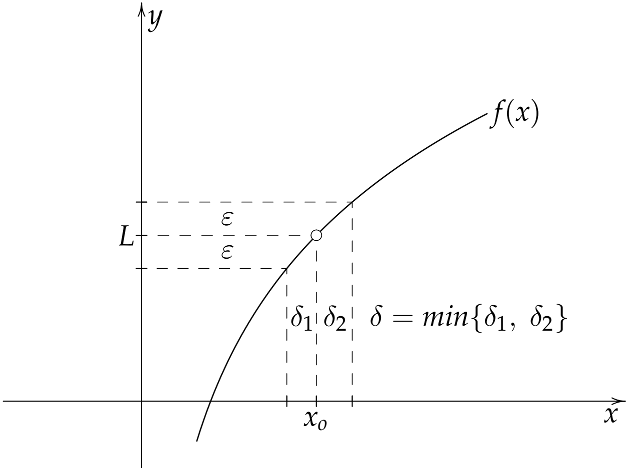
Definice

▶ Předpokládáme, že funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí bodu x_o (tj. v bodě x_o může, ale nemusí být definována).

Řekneme, že limita funkce f pro x blížící se k x_o je rovna číslu L, jestliže ke $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ tak, že pro $\forall\, x$ splňující $0 < |x - x_o| < \delta$ je $|f(x) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$

Jde o vlastní limitu ve vlastním bodě. ◀



$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

Jednostranné limity funkce

Definice

- Předpokládáme, že funkce f je definovaná v nějakém levostranném, pravostranném okolí bodu x_o.

Řekneme, že limita funkce f pro x blížící se k x_o zleva, zprava je rovna číslu L, jestliže ke $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ tak, že pro $\forall\, x$ splňující $x \in (x_o - \delta,\, x_o)$, $x \in (x_o,\, x_o + \delta)$ je $|f(x) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L \qquad \text{limita zleva}$$
$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L \qquad \text{limita zprava.}$$

Vlastnosti limity

- Pokud limita v daném bodě existuje, je dána jednoznačně.
- Limita je lokální pojem - nezáleží na chování funkce v bodech vzdálených x_o.
- Limita neovlivňuje hodnotu $f(x_o)$, pokud existuje. Může být $f(x_o) \neq L$.
- Je-li $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = L$, pak existuje $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ a je rovna L.

Věty o limitách

Věta (O sevřené funkci)

- Jestliže pro $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_o)$ platí: $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$

a $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$, pak $\exists\ \lim\limits_{x \to x_o} h(x)$ a je rovna L.

Věta (O záměně pořadí limity a aritmetické operace)

- Nechť o značí jednu z operací $+,\ -,\ \cdot,\ \div$ a příslušné limity existují. Pak platí:

$$\lim_{x \to x_o} (f(x)\ o\ g(x)) = \lim_{x \to x_o} f(x)\ o\ \lim_{x \to x_o} g(x),$$

přičemž pro podíl musí být $g(x) \neq 0$ na $\overset{\circ}{U}_\delta(x_o)$

Spojitost funkce

Definice

▶ Máme funkci f definovanou v nějakém okolí $U_\delta(x_o)$ (tj. i v x_o). Řekneme, že f je v bodě x_o spojitá, jestliže

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o).$$ ◀

Definice

▶ Funkce je spojitá na intervalu I (otevřeném, nebo uzavřeném), je-li spojitá v každém bodě I. (V krajních bodech jednostranně, viz dále.) ◀

Věta ▶ Jsou-li f, g spojité v x_o, potom i $f \, o \, g$ je spojitá v x_o, přičemž o značí jednu z operací: + , - , $\cdot$, $\div$, pro dělení musí platit: $g(x) \neq 0$ na nějakém $U_\delta(x_o)$. ◀

Jednostranná spojitost funkce

Definice

► Funkce f, definovaná v levo (pravo)stranném okolí bodu x_o včetně bodu x_o, je v tomto bodě spojitá zleva (zprava), jestliže

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)$$

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = f(x_o)$$

Funkce je spojitá v bodě x_o, je-li spojitá v x_o zleva i zprava. ◄

Spojitost složené funkce

Věta (O spojitosti složené funkce)

▶ Nechť je funkce f spojitá v bodě c a funkce g je spojitá v bodě d, přičemž $g(d) = c$. Pak složená funkce $h = f \circ g$ je spojitá v bodě d, $h(d) = f(g(d)) = f(c)$. ◀

Při výpočtu limity se často hodí následující skutečnost.

Platí: je-li $f(x) = g(x)$ v nějakém $\overset{\circ}{U}_\delta(x_o)$, pak $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$, pokud zmíněné limity existují.

A to je návod, jak počítat mnohé limity. Bude zužitkován v následujících příkladech.

Příklad

Příklad: ▶ Je dána funkce $f(x) \begin{array}{l} = 1 \text{ pro } x \neq 0 \\ = 0 \text{ pro } x = 0. \end{array}$ Určete $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Řešení: Volíme $g(x) = 1$ pro $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Pak $g(x) = f(x)$ v $\overset{\circ}{U}_\delta(0)$ a $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$. A jsme celí hotoví. ◀

Příklad: ▶ Určete $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.

Řešení: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \left[\begin{array}{c} \text{Nejprve zkoušíme} \\ \text{dosadit. Vyjde:} \end{array} \right] = \dfrac{0}{0} = \left[\begin{array}{c} \text{můžeme krátit} \\ \text{dvojčlenem } (x - 2) \end{array} \right] = \lim\limits_{x \to 2} (x + 1) = 3.$ A je to. ◀

Věta o záměně limity a funkce

Věta ▶ Jestliže $\exists \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = c$ a $f(x)$ je v bodě c spojitá, pak

$$\lim_{x\to x_o} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_o} g(x)) = f(c)$$ ◀

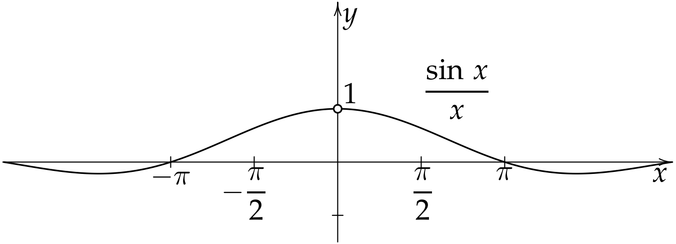
Příklad: ▶ Určete $\lim\limits_{x\to 1} \ln \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}$.

Řešení: $$\lim_{x\to 1} \ln \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \ln\left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 1} \frac{x}{x + 2}\right) =$$

$$= \ln\frac{1}{3} \doteq -1.0986.$$ ◀

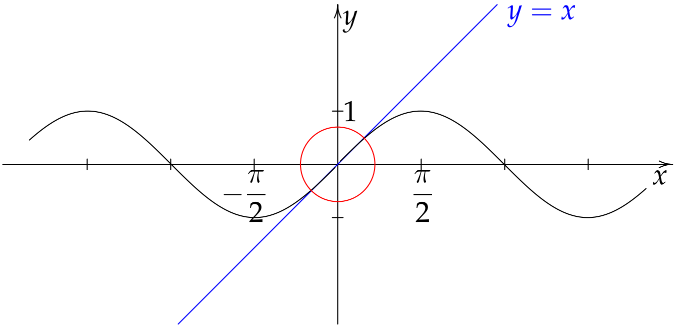
I. význačná limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\, x}{x} = 1$$



I. význačná limita

Z limity vyplývá, že pro x blízká nule je $\sin x \approx x$.



Věta o substituci

Věta ▶ Nechť $\lim_{u\to d} f(u) = L$ a $\lim_{x\to c} g(x) = d$ a buď f je spojitá v d, nebo $g(x) \neq d$ v nějakém okolí bodu c. Potom

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = \lfloor \text{substituce } u = g(x) \rceil = \lim_{u\to d} f(u).$$ ◀

Příklad: ▶ Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{3x^2} \cdot 3 = \left\lfloor \begin{array}{c} \text{substituce} \\ u = 3x^2,\ u \to 0 \end{array} \right\rceil = \lim_{u\to 0} 3\, \frac{\sin u}{u} = 3$$ ◀

Důsledky limity

Dále platí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1 \ \text{ pro } k \in \mathbf{R},\ k \neq 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^k(x)}{x^k} = 1 \text{ pro } k \in \mathbf{R},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^k}{x^k} = 1 \ \text{ pro } k \in \mathbf{R}^+,$$

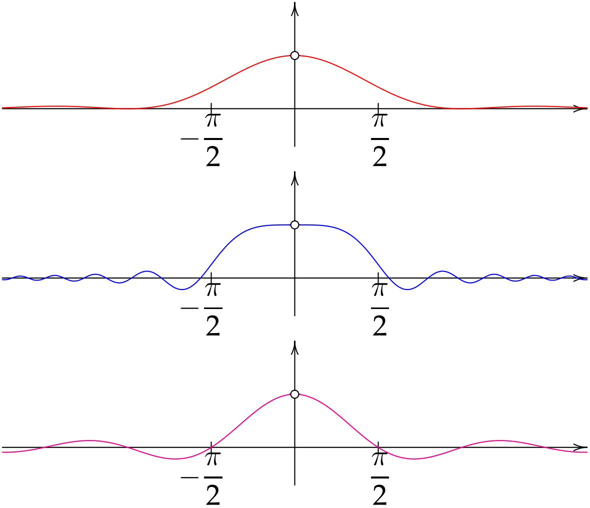
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan\ x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

Pro x blízká nule je

$$\tan x \approx x, \quad \arcsin x \approx x, \quad \arctan x \approx x$$

a jsou splněny obdobné vztahy jako ty výše uvedené pro sinus.

Příklad: ▶ Daným funkcím $\dfrac{\sin 2x}{2x}$, $\dfrac{\sin\, x^2}{x^2}$, $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ přiřaďte odpovídající grafy.



Nevlastní limita

Definice

Říkáme, že funkce f má v bodě x_o nevlastní limitu $\begin{array}{l} +\infty, \\ -\infty, \end{array}$ jestliže

ke $\begin{array}{l} \forall\, k > 0 \\ \forall\, k < 0 \end{array}$ $\exists\, \delta > 0$ tak, že pro $\forall\, x :\ 0 < |x - x_o| < \delta$

je $\begin{array}{l} f(x) > k \\ f(x) < k. \end{array}$ Píšeme $\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = -\infty. \end{array}$

(Ne)vlastní limita v nevlastním bodě

Definice

Říkáme, že funkce f má limitu L v nevlastním bodě $x_o = \pm\infty$, jestliže ke $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, c$ takové, že pro $\forall x \gtrless c$ je $|f(x) - L| < \epsilon$.

Píšeme $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

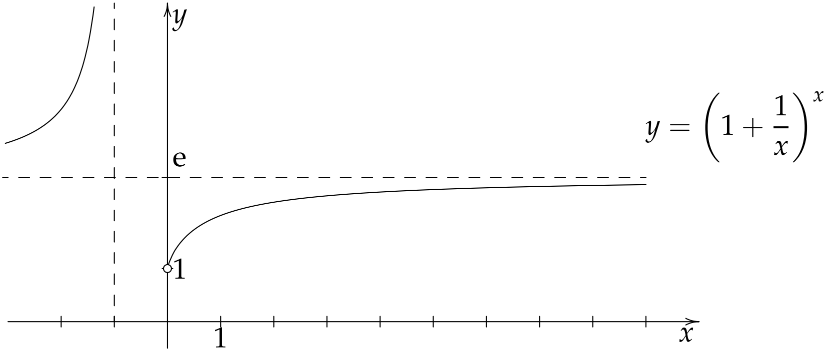
$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$

Říkáme, že funkce f má nevlastní limitu $+\infty$ v nevlastním bodě $+\infty$, jestliže ke $\forall\, k > 0 \quad \exists\, c$ takové, že pro $\forall\, x > c$ je $f(x) > k$.

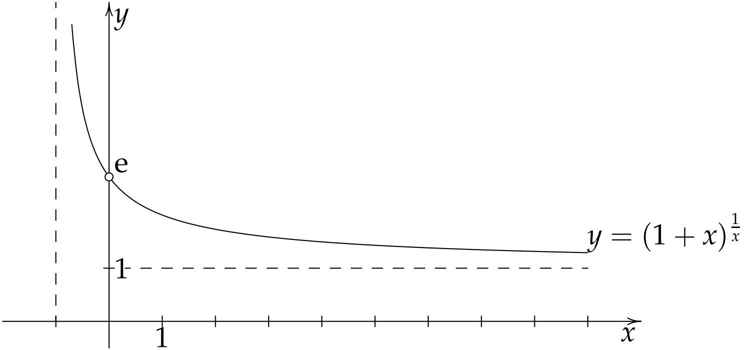
Píšeme $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

II. význačná limita

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$



$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$



II. význačná limita

Další limity, které vyplývají z těch předešlých:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Limity se spočítají vhodnou substitucí, kterou se převedou na předešlé.

Asymptoty

Jestliže limita funkce ve vlastním (konečném) bodě je nevlastní (nekonečná), graf funkce má svislou asymptotu (asymptotu bez směrnice).

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \text{svislá asymptota } \ x = x_0.$$

(Limita může být zleva, zprava nebo oboustranná.)

Jestliže limita funkce v nevlastním bodě (nekonečnu) je vlastní (konečná), graf funkce má vodorovnou asymptotu.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \text{vodorovná asymptota } \ y = L.$$

Asymptoty

Definice

Říkáme, že přímka $y = kx + q$ je asymptotou (se směrnicí) křivky $y = f(x)$ pro $x \to \pm\infty$, jestliže platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx+q)) = 0.$$

Určení rovnice asymptoty

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k\,x) = q.$$

Vyjde-li směrnice k nenulová, mluvíme o šikmé asymptotě, pro $k = 0$ jsme opět u vodorovné asymptoty $y = q$.

Příklad: ▶ Určete všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = \dfrac{x|x+1|}{x-1} - x$. Načrtněte části grafu v blízkosti asymptot.

Řešení: Vzhledem k absolutní hodnotě hledáme řešení úlohy zvlášť pro $x < -1$ a pro $x \geq -1$.

a) $x < -1$

Pak $f(x) = -\dfrac{2x^2}{x-1}$, funkce je definována na celém intervalu $(-\infty, -1)$ $\Rightarrow$ svislá asymptota není. Zjistíme, zda je šikmá, vodorovná, nebo žádná.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{2x^2}{x(x-1)} = -2 \Rightarrow$ šikmá asymptota je a má směrnici $k = -2$. Určíme q.

Pokračování příkladu

$$q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k\,x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2x^2}{x-1} + 2x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^2 + 2x^2 - 2x}{x-1}$$

$= -2$. A máme rovnici šikmé asymptoty: $y = -2x - 2$.

b) $x \geq -1$

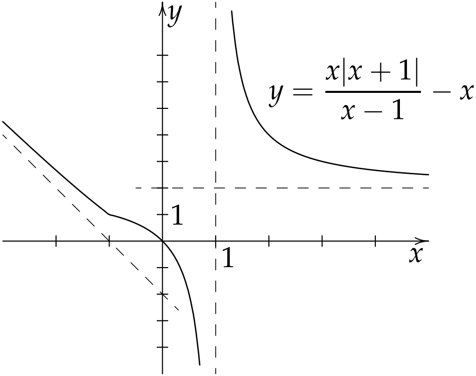
Nyní $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. Funkce není definována v bodě $x = 1$.

$\displaystyle\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{2x}{x-1} = \pm\infty, \quad \Rightarrow$ graf má svislou asymptotu $x = 1$.

A protože $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$, existuje i vodorovná asymptota a má rovnici $y = 2$.

Konec příkladu

Závěr: graf funkce má šikmou asymptotu $y = -2x - 2$ v $-\infty$, svislou asymptotu $x = 1$ a vodorovnou asymptotu $y = 2$ v $+\infty$.



Děkuji za pozornost