Extrémy funkce

Helena Říhová

FBMI

8. prosince 2010

Obsah

1 Lokální extrémy
- Definice lokálního extrému
- Funkce konvexní a konkávní
- Globální extrémy

Definice lokálního extrému

Definice

▶ Funkce f má v bodě $c \in D_f$ lokální $\begin{matrix} \text{minimum}, \\ \text{maximum}, \end{matrix}$ jestliže

$\exists \, \overset{\circ}{U}_\delta(c) \subset D_f$ takové, že pro $\forall \, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(c)$ je $\begin{matrix} f(x) \geq f(c) \\ f(x) \leq f(c). \end{matrix}$ ◀

Věta ▶ Má-li funkce f v bodě $c \in D_f$ lokální extrém a existuje $f'(c)$, pak $f'(c) = 0$. ◀

Bod c, pro nějž $f'(c) = 0$, se nazývá stacionární.

Podmínka na extrém

Věta ▶ Předpokládáme, že f je spojitá v bodě $c \in D_f$ a

a) $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (c-\delta, c)$ $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (c, c+\delta)$,
pak f má v bodě c lokální minimum.

b) $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (c-\delta, c)$ $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (c, c+\delta)$,
pak f má v bodě c lokální maximum.

c) $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (c-\delta, c)$ $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (c, c+\delta)$,
pak v bodě c není extrém.

d) $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (c-\delta, c)$ $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (c, c+\delta)$,
pak v bodě c není extrém. ◀

Poznámka: Věta platí jak pro stacionátní bod c tak pro bod c,
kde f' neexistuje.

Podmínka na extrém

Věta ▶ Předpokládáme, že $f'(c) = 0$ a $f''(c)$ existuje. Potom je-li

a) $f''(c) > 0$, funkce má v bodě c lmin

b) $f''(c) < 0$, lmax ◀

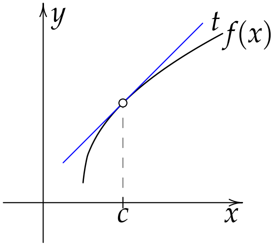
Poznámka: Případ $f''(c) = 0$ může znamenat jakýkoli stacionární bod.

Definice konvexní a konkávní funkce

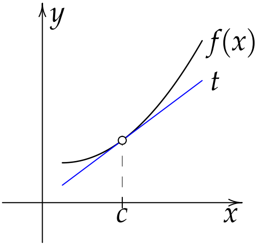
Definice

- Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $c \in D_f$. Řekneme, že funkce f je v bodě c konkávní (konvexní), jestliže $\exists \; \mathring{U}_\delta(c)$ takové, že pro $\forall x \in \mathring{U}_\delta(c)$ je

$$f(x) < f(c) + f'(c)\,(x-c) \qquad f(x) > f(c) + f'(c)\,(x-c)$$



konkávní - graf leží pod tečnou



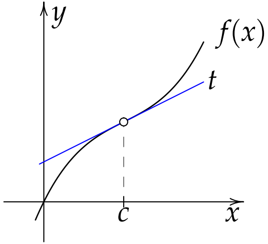
konvexní - graf leží nad tečnou

Inflexní bod, tečna ke grafu $f(x)$

Definice

▶ Bod, kde se funkce mění z konkávní na konvexní, nebo naopak, se nazývá inflexní. ◀

$$f(x) < f(c) + f'(c)\,(x - c) \text{ pro } x < c,$$
$$f(x) > f(c) + f'(c)\,(x - c) \text{ pro } x > c.$$



$y = f(c) + f'(c)\,(x - c)$ je rovnice tečny v bodě $[c, f(c)]$.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Věta ▶ Je-li

$f''(c) > 0$, f je v bodě c konvexní,
$f''(c) < 0$, konkávní.

Má-li f v bodě c inflexní bod a f'' existuje, pak $f''(c) = 0$. ◀

Průběh funkce

1) Definiční obor funkce D_f, symetrie funkce - sudost, lichost, periodičnost

2) Limity v “zajímavých” bodech, tj. v krajních bodech D_f, nebo v izolovaných bodech, které nepatří do D_f.

3) Asymptoty.

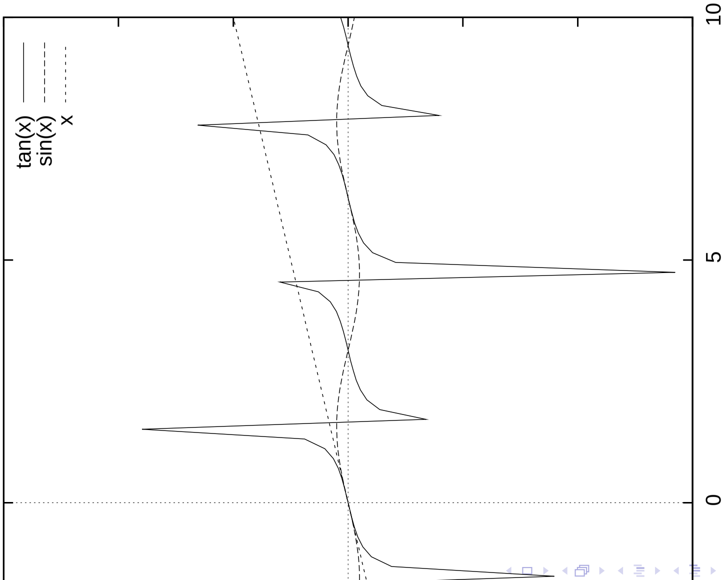
4) Průsečíky se souřadnicovými osami.

Poznámka: Již z těchto informací jde velmi často načrtnout graf dané funkce. Není-li zbytí, pokračujeme dál.

5) první derivace a z ní stacionární body a body, kde derivace neexistuje (body podezřelé z extrému), monotónie funkce a lokální extrémy.

6) Budeme-li ještě při síle, určíme druhou derivaci a z ní zakřivenost funkce, popř., pokud už to dávno nevíme, kvalitu extrémů.

Graf funkce



Globální extrémy

Věta ▶

Jestliže funkce nabývá svého gmax, nebo gmin v bodě $c \in (a, b)$ a $\exists f'(c)$, potom $f'(c) = 0$. ◀

Věta ▶

Funkce f, spojitá na $\langle a,\ b\rangle$ nabývá svého gextru buď

a) v krajních bodech intervalu $\langle a,\ b\rangle$, nebo

b) ve stacionárních bodech, nebo

c) v bodech, kde $f'(c)$ neexistuje. ◀