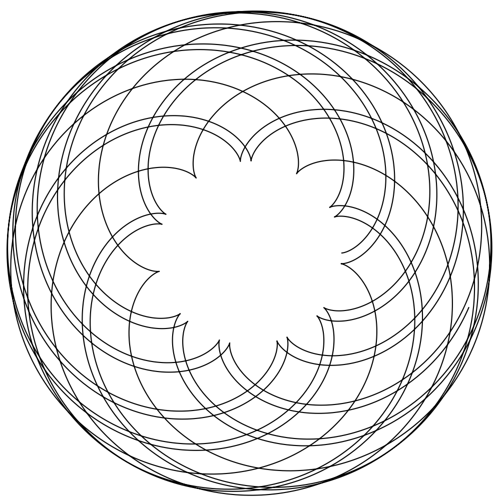
Elementární funkce

(Stručný přehled)



Obsah

Seznam používaných symbolů

$\mathbf{D}_f$ definiční obor funkce f

$\mathbf{H}_f$ obor hodnot funkce f

$\mathbf{N}$ množina přirozených čísel

P_x průsečík grafu funkce s osou x

P_y průsečík grafu funkce s osou y

$\mathbf{R}$ množina reálných čísel

$\mathbf{R}^+$ množina kladných reálných čísel, tj. interval $(0, +\infty)$

$\mathbf{R}_o^+$ množina nezáporných reálných čísel, tj. interval $\langle 0, +\infty)$

$\mathbf{Z}$ množina celých čísel

$\forall$ velký kvantifikátor – znamená: každý, pro všechny ...

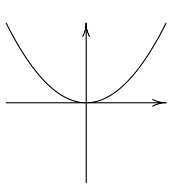
1 Úvod

Název elementární funkce je dán historicky. Míní se jím funkce, které byly popsány do konce 18. století. Uvedeme jejich přehled spolu se základními charakteristikami – definičním oborem, oborem hodnot, intervaly monotónnosti, symetrií a doplníme náčrtkem grafu. Než se ale do nich pustíme, zopakujeme si pojmy sudá, lichá funkce, (ne)rostoucí, (ne)klesající funkce.

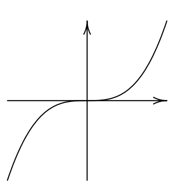
Funkce f je **sudá**, jestliže platí:
a) pro $\forall x \in \mathbf{D}_f$ je také $-x \in \mathbf{D}_f$,
b) pro $\forall x \in \mathbf{D}_f$ je $f(-x) = f(x)$.
Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y.

Funkce f je **lichá**, jestliže platí:
a) pro $\forall x \in \mathbf{D}_f$ je také $-x \in \mathbf{D}_f$,
b) pro $\forall x \in \mathbf{D}_f$ je $f(-x) = -f(x)$.
Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku. Pokud je lichá funkce definovaná pro $x = 0$, platí $f(0) = 0$, tj. graf prochází počátkem.

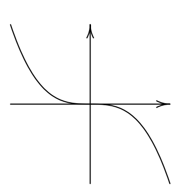
$$\text{Funkce } f \text{ je } \left\{ \begin{array}{l} \textbf{rostoucí} \\ \textbf{neklesající} \\ \textbf{nerostoucí} \\ \textbf{klesající} \end{array} \right. \text{ jestliže pro } \forall x_1,\ x_2 \in \mathbf{D}_f,\ \ x_1 < x_2, \text{ je } \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2), \\ f(x_1) \leq f(x_2), \\ f(x_1) \geq f(x_2), \\ f(x_1) > f(x_2). \end{array} \right.$$



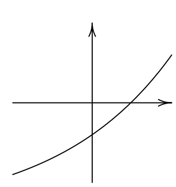
fce sudá



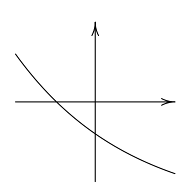
fce lichá
neklesající



fce lichá
nerostoucí



fce rostoucí



fce klesající

2 Mocninné funkce

Mocninné funkce jsou dány analytickým předpisem

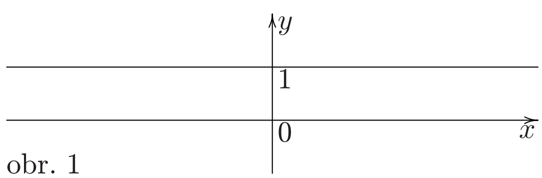
$$f: \quad y = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

2.1 Konstantní funkce

Je-li $\alpha = 0$ dostáváme konstantní funkci

$$f: \quad y = 1. \qquad \text{(Obecná konstantní funkce je dána předpisem } f: \quad y = k,\ k \in \mathbf{R}.)$$

$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$,
$\mathbf{H}_f = \{1\}$. (Pro obecnou konstantní funkci je $\mathbf{H}_f = \{k\}$.)
$P_y = [0, 1]$
Funkce je sudá.



obr. 1

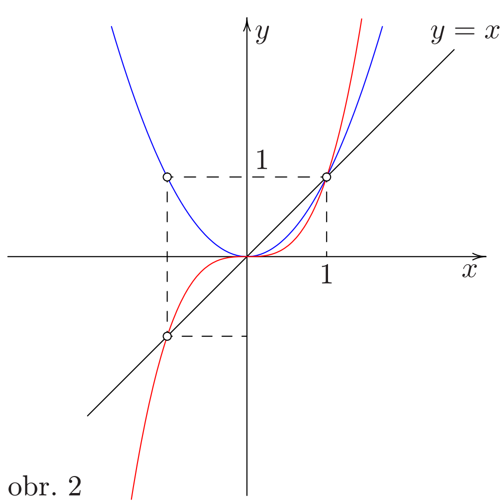
2.2 Celočíselné kladné mocniny

Nyní $\alpha \in \mathbf{N}$, obvykle značíme $\alpha = n$ a příslušná funkce je vyjádřena vztahem:

$$f: \quad y = x^n.$$

$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}_o^+$ pro n sudé,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}$ pro n liché,
$P_x = [0, 0] = P_y$.

Pro n **sudé** je funkce sudá, klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $(0, +\infty)$, na obr. 2 modrá křivka.
Pro n **liché** je funkce lichá, rostoucí na celém $\mathbf{D}_f$, na obr. 2 červená křivka a přímka.



obr. 2

Grafy všech celočíselných mocnin procházejí body [0,0] a [1,1], sudé mocniny procházejí navíc bodem [-1,1], liché mocniny bodem [-1,-1]. Funkce $y = x$ se nazývá lineární, jejím grafem je přímka (osa prvního a třetího kvadrantu), funkce $y = x^2$ se nazývá kvadratická, grafem je parabola s vrcholem v počátku.

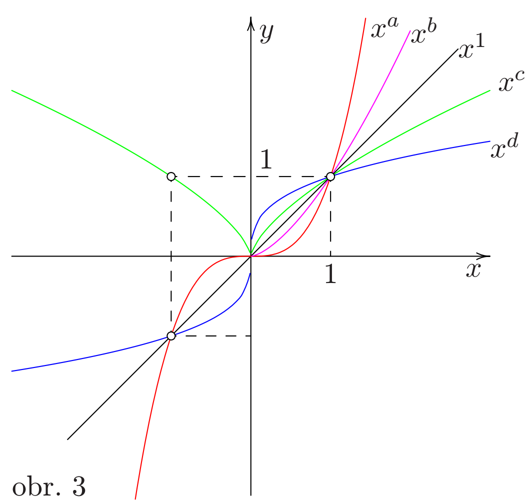
2.3 Mocniny s kladným racionálním exponentem

Funkce jsou vyjádřeny vztahem:

$$f: \quad y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m},$$

kde $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ a předpokládáme, že $m,\ n$ jsou čísla nesoudělná.
$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$ pro n liché,
$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}_o^+$ pro n sudé, m liché,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}_o^+$ pro n liché, m sudé, nebo pro n sudé, m liché,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}$ pro $n,\ m$ obě lichá,
$P_x = [0,0] = P_y$.

Pro $n,\ m$ obě lichá je funkce lichá, rostoucí na celém $\mathbf{D}_f$, na obr. 3 červená $\left(\dfrac{m}{n} > 1\right)$ nebo modrá křivka $\left(\dfrac{m}{n} < 1\right)$. Pro n liché, m sudé je funkce sudá, klesající na $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí na $\langle 0, +\infty)$, na obr. 3 zelená křivka $\left(\dfrac{m}{n} < 1\right)$. Je-li m liché, n sudé, funkce je definována pouze pro nezáporná x, není tedy ani sudá, ani lichá. Je rostoucí, na obr. 3 fialová křivka $\left(\dfrac{m}{n} > 1\right)$.



obr. 3

Označíme-li exponenty funkcí postupně a, b, c, d, splňují následující nerovnost:
$a > b > 1 > c > d$.

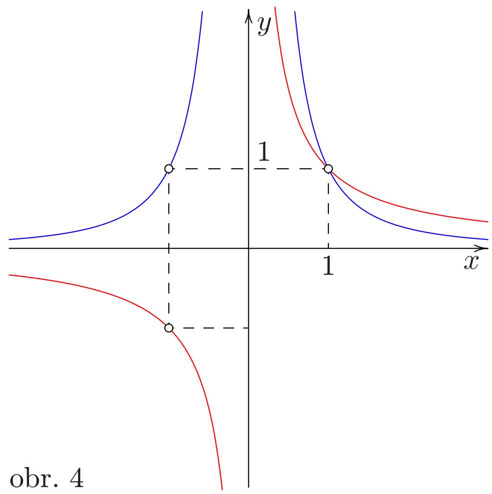
2.4 Mocniny se záporným exponentem

Nejprve budeme uvažovat celočíselný záporný exponent, tj. funkce tvaru:

$$f: \quad y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{kde } n \in \mathbf{N}.$$

$\mathbf{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}^+$ pro n sudé,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pro n liché.
Průsečíky s osami nejsou.

Podobně jako u celočíselných kladných mocnin je funkce sudá pro n **sudé**, ale tentokrát rostoucí na $(-\infty, 0)$, a klesající na $(0, +\infty)$, na obr. 4 modrá křivka.
Pro n **liché** je funkce lichá (na obr. 4 červená křivka), klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$, ale nikoli klesající na celém $\mathbf{D}_f$!



obr. 4

Mocninné funkce se záporným racionálním exponentem mají podobný průběh jako mocninné funkce s celočíselným záporným exponentem s tím rozdílem, že v některých případech (pilný čtenář si sám doplní v kterých) je definiční obor a tím i obor hodnot zúžen na $\mathbf{R}^+$. Grafy všech záporných mocnin prochází bodem [1;1] a osa x, resp.y tvoří vodorovnou, resp. svislou asymptotu grafu.

2.5 Mocniny s iracionálním exponentem

jsou funkce tvaru:

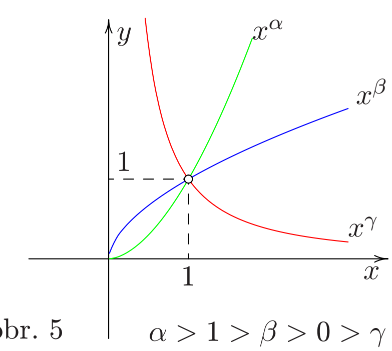
$$f: \quad y = x^\alpha,$$

kde α je iracionální číslo. Jsou definovány pomocí exponenciální a logaritmické funkce (viz dále) vztahem

$y = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.

$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}^+$,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}^+$.

Pro $\alpha > 0$ funkce roste, pro $\alpha < 0$ funkce klesá, graf vždy prochází bodem $[1; 1]$.



obr. 5 $\alpha > 1 > \beta > 0 > \gamma$

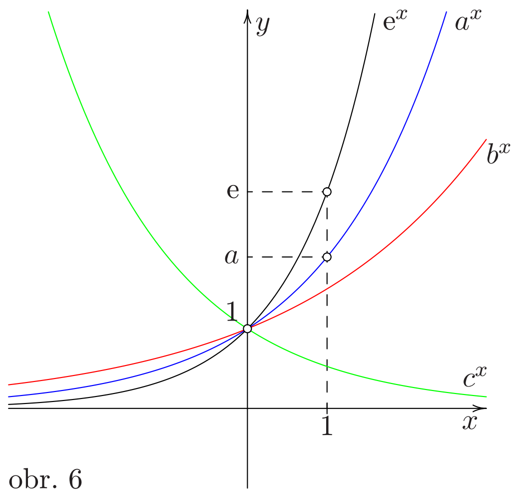
3 Exponenciální funkce

je každá funkce vyjádřená vztahem

$$f: \quad y = a^x,$$

kde $a > 0,\ a \neq 1$. Na rozdíl od mocnin je nyní proměnná nikoli v základu, ale v exponentu.
$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}^+$.

Pro $a > 1$ funkce roste, pro $0 < a < 1$ funkce klesá, graf vždy prochází bodem $[0; 1] = P_y$ a osa x je vodorovná asymptota grafu.



obr. 6

$$\mathrm{e} > a > b > 1 > c > 0$$

Mezi všemi exponenciálními funkcemi má výsadní postavení tzv. **přirozená exponenciální funkce**, tj. ta, která má základ rovný Eulerovu číslu $\mathrm{e} \doteq 2.71828182846$ (jde o iracionální číslo, proto ta tečka nad rovnítkem). Pomocí této funkce se popisuje řada jevů; např. radioaktivní rozpad prvků, pohlcování elektromagnetického záření a další. Má-li exponenciální funkce o základu e složitější argument, používá se pro ni označení $\exp(x)$.

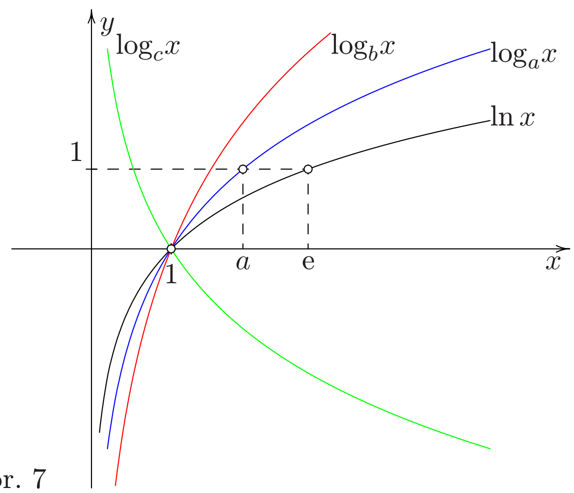
4 Logaritmické funkce

jsou funkce inverzní k exponenciálním. Logaritmickou funkci o základu $a,\ a > 0,\ a \neq 1$ zapisujeme vztahem:

$$f: \quad y = \log_a x,$$

přičemž platí: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$, tzn. že logaritmus a exponenciála o stejném základu jsou vzájemně inverzní funkce.
$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}^+$,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}$.

Pro $a > 1$ funkce roste, pro $0 < a < 1$ funkce klesá, graf vždy prochází bodem $P_x[1; 0]$, osa y je svislá asymptota grafu.



obr. 7

$$e > a > b > 1 > c > 0$$

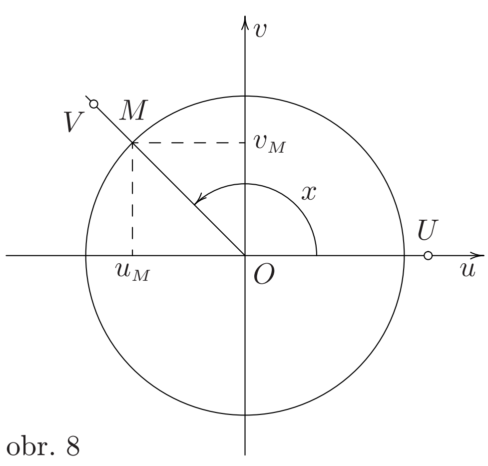
Logaritmus o základu e se nazývá **přirozený logaritmus** a značí se $\ln x$. Logaritmus resp. exponenciálu o libovolném základu je možno vyjádřit pomocí přirozeného logaritmu resp. exponenciály vztahy:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \qquad a^x = e^{x \ln a}$$

.

5 Goniometrické funkce

Ke goniometrickým funkcím řadíme funkce: **sinus, kosinus, tangens** a **kotangens**. Nadefinujeme si je pomocí jednotkové kružnice.



obr. 8

V kartézské soustavě souřadnic Ouv je dána jednotková kružnice (tj. poloměr je 1) se středem v bodě O. Zvolíme si nějaké reálné číslo x. Pak existuje právě jeden orientovaný úhel $\widehat{UOV}$, který má počáteční rameno OU v kladné poloose u a jedna z jeho velikostí je x (rad). Koncové rameno OV protne kružnici v jediném bodě $M[u_M; v_M]$. Tím je libovolnému reálnému číslu x jednoznačně přiřazeno číslo u_M a číslo v_M. Označíme:

$$v_M = \sin x, \qquad u_M = \cos x$$

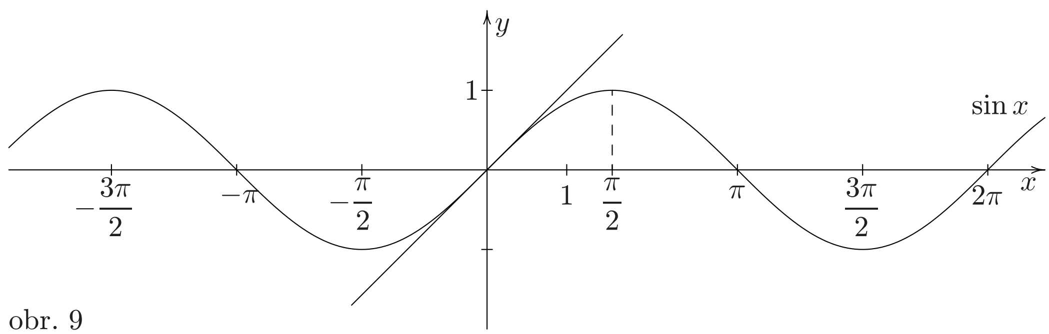
a příslušné funkce nazveme sinus a kosinus. Funkce tangens je definována jako podíl sinu a kosinu, funkce kotangens je převrácená hodnota funkce tangens, tj. podíl kosinu a sinu.

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce **sinus**

$f: \quad y = \sin x, \quad$ má

$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$,
$\mathbf{H}_f = \langle -1; 1 \rangle$.
Je lichá a periodická[1] s nejmenší periodou 2π. Průsečíky s osou x jsou v celočíselných násobcích π, tj. $P_x = [k\pi; 0]$, $k \in \mathbf{Z}$, průsečík s osou y je počátek.



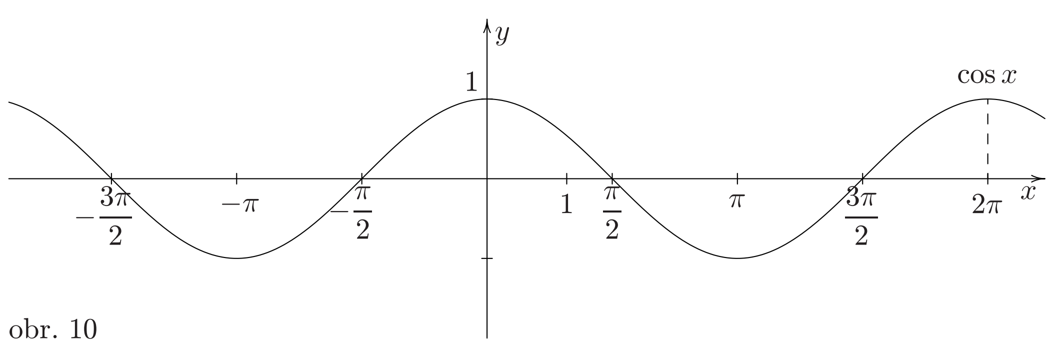
obr. 9

Všimněte si, že přímka $y = x$ protíná graf sinu pouze v počátku, nikoli ve třech bodech, jak se někdy kreslí; je tečnou grafu v počátku. Krom jiného to znamená, že pro argumenty x blízké nule platí: $\sin x \approx x$ (x v rad!), čehož se úspěšně využívá při různých výpočtech.

Funkce **kosinus**

$f: \quad y = \cos x, \quad$ má stejně jako sinus

$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$,
$\mathbf{H}_f = \langle -1; 1 \rangle$
a je periodická s periodou 2π. Na rozdíl od sinu to je funkce sudá. Graf kosinu protíná osu x v lichých násobcích $\pi/2$, $P_x = \left[(2k+1)\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $P_y = [0; 1]$.



obr. 10

[1] Funkce f je periodická, jestliže existuje kladné číslo p, které splňuje:
a) pro $\forall x \in \mathbf{D}_f$ a $\forall k \in \mathbf{Z}$ je také $\quad x + kp \in \mathbf{D}_f$,
b) pro $\forall x \in \mathbf{D}_f$ a $\forall k \in \mathbf{Z}$ je $\quad f(x + kp) = f(x)$. Číslo p se nazývá perioda funkce f.

Funkce **tangens**

$$f: \quad y = \mathrm{tg} x$$

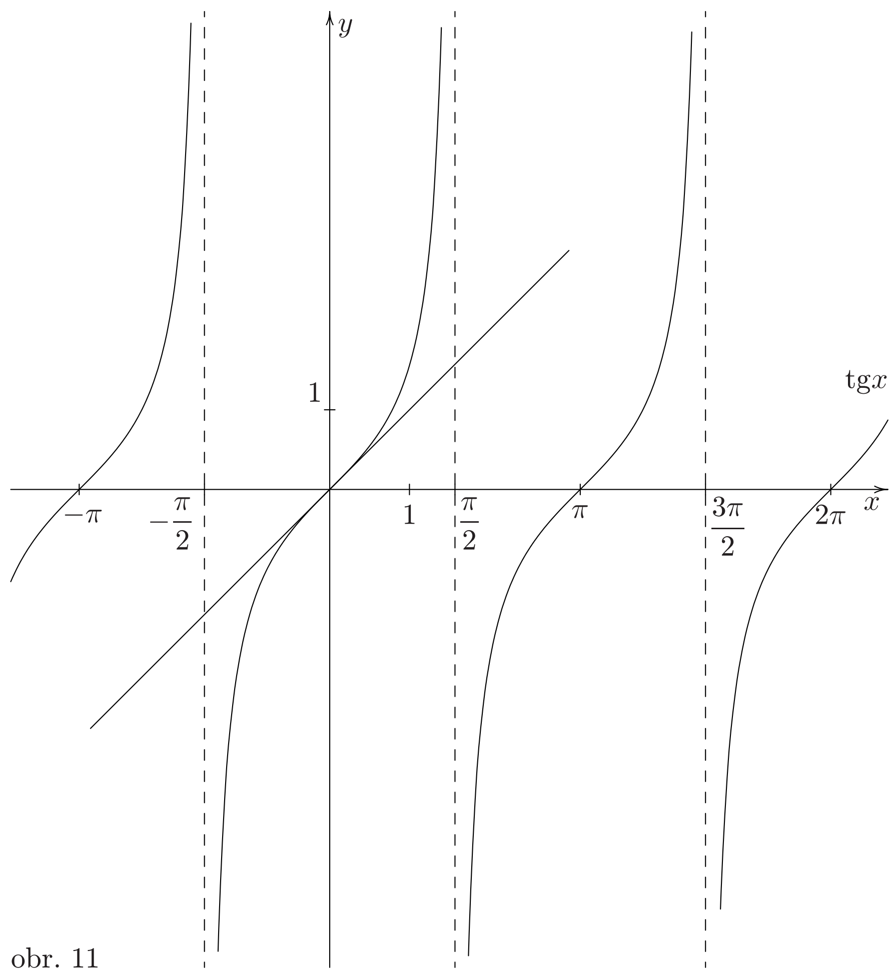
je definována vztahem: $y = \mathrm{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

To znamená, že z definičního oboru musíme vyloučit body, ve kterých je kosinus roven nule, tj. liché násobky $\pi/2$. Definičním oborem je tedy sjednocení nekonečně mnoha otevřených intervalů tvaru$\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}; (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, což zapisujeme následovně.

$\mathbf{D}_f = \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$,

$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}$.

Tangens je funkce lichá, periodická s periodou π. Na každém z intervalů $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ je rostoucí. Průsečíky grafu funkce s osou x jsou v bodech $P_x = [k\pi; 0]$, $k \in \mathbf{Z}$, osu y protíná graf v počátku. Body, kde funkce tangens není definována, prochází svislé asymptoty grafu.



obr. 11

Podobně jako tomu bylo u sinu, i u tangenty pro argumenty blízké nule je $\mathrm{tg}\, x \approx x$; přímka $y = x$ je opět tečnou grafu v bodě [0,0].

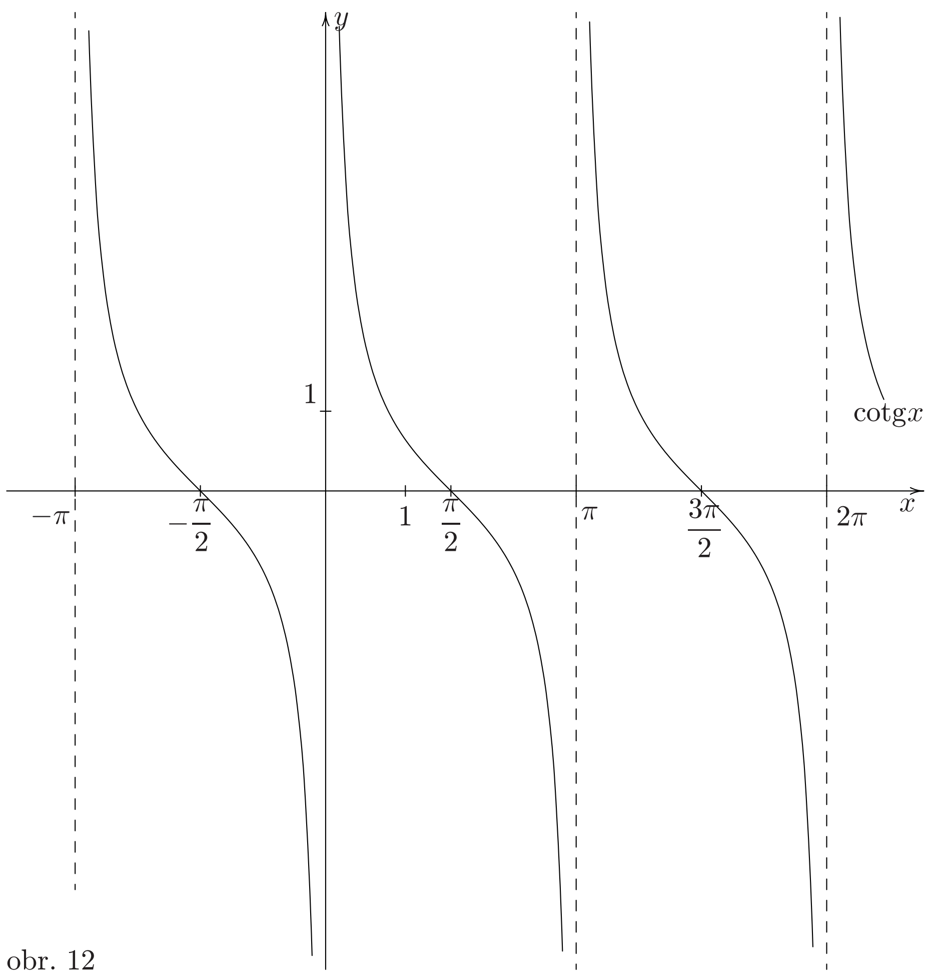
Funkce **kotangens**

$f: \quad y = \text{cotg}x$

je definována vztahem: $y = \text{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Z definičního oboru jsou tedy vyloučeny všechny celočíselné násobky π, neboť $\sin k\pi = 0$.
$\mathbf{D}_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}} (0 + k\pi; \pi + k\pi)$,

$\mathbf{H}_f = \mathbf{R}$.



obr. 12

Kotangens je funkce lichá a periodická s periodou π. Na každém z intervalů $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$ je klesající. Graf funkce má v celočíselných násobcích π svislé asymptoty, průsečíky s osou x jsou $P_x = \left[(2k+1)\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$, průsečík s osou y neexistuje.

Poznámka: Funkce tangens se též značí $\tan x$ (např. na kalkulačkách), funkce kotangens bývá též značena $\text{ctan}\, x$. Kotangens na kalkulačkách většinou nenajdete, vyjadřuje se pomocí tangenty, nebo pomocí sinu a kosinu.

Nakonec tabulka hodnot, které není špatné si pamatovat.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
$\mathrm{cotg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0

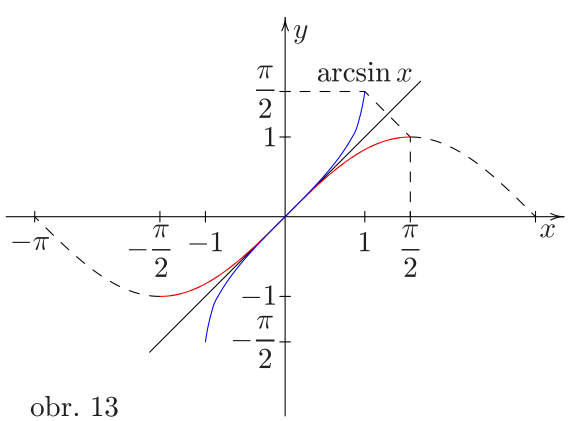
6 Cyklometrické funkce

jsou funkce inverzní ke goniometrickým, jejichž definiční obor je zúžen na interval, kde jsou monotónní, tedy prosté (jinak by inverzní funkce neexistovala).
Uvažujme funkci $y = \sin x$ s definičním oborem $\mathbf{D}_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Na tomto intervalu je funkce sinus rostoucí (viz obr. 9), takže existuje inverzní funkce – nazývá se arkussinus a značí $\arcsin x$.

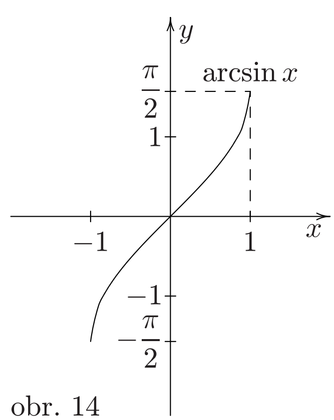
Funkce **arkussinus**

$$f: \quad y = \arcsin x, \quad \text{má}$$

$\mathbf{D}_f = \langle -1; 1 \rangle$,
$\mathbf{H}_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
a platí $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$. Je to funkce lichá a rostoucí. Graf prochází počátkem a je osově souměrný s grafem sinu podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky $y = x$).



obr. 13

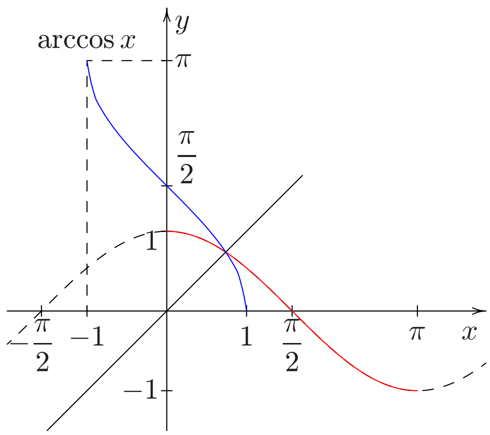


obr. 14

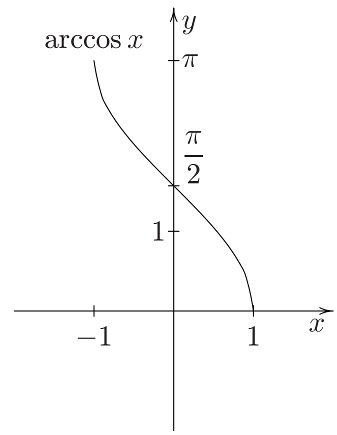
Funkce **arkuskosinus**

$$f: \quad y = \arccos x$$

je inverzní funkce k funkci $\cos x$ definované na $\langle 0; \pi\rangle$. Platí: $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$.
$\mathbf{D}_f = \langle -1; 1\rangle$,
$\mathbf{H}_f = \langle 0; \pi\rangle$,
Funkce není ani sudá ani lichá a je klesající. Graf je osově souměrný s grafem kosinu podle přímky $y = x$, osu y protíná v bodě $P_y\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.



obr. 15



obr. 16

Funkce **arkustangens**

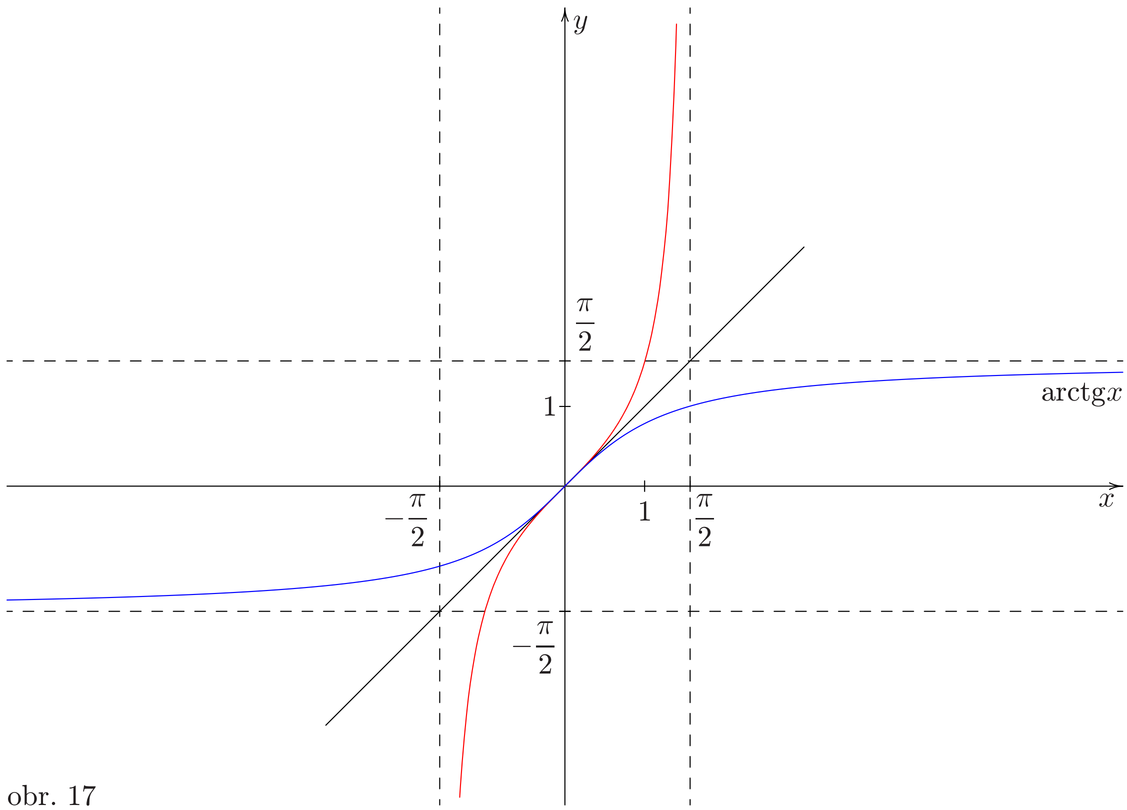
$$f: \quad y = \operatorname{arctg} x$$

je inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Platí: $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$.
$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$
$\mathbf{H}_f = \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Funkce je lichá a rostoucí. Graf (obr. 17) je osově souměrný s grafem tangenty podle přímky $y = x$, osu y i osu x protíná v počátku. Má vodorovné asymptoty
$y = \dfrac{\pi}{2}$ pro $x \to +\infty$, $\quad y = -\dfrac{\pi}{2}$ pro $x \to -\infty$.

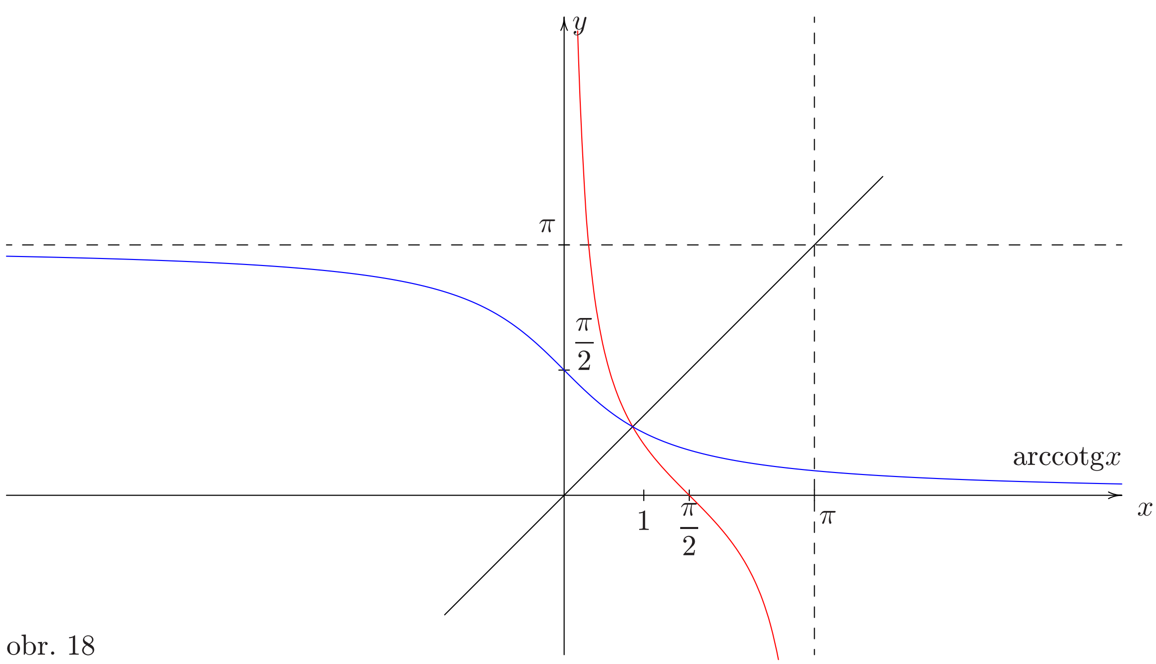
Funkce **arkuskotangens**

$$f: \quad y = \operatorname{arccotg} x$$

je inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na $(0; \pi)$. Platí: $y = \operatorname{arccotg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y$.
$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$
$\mathbf{H}_f = (0; \pi)$.



obr. 17



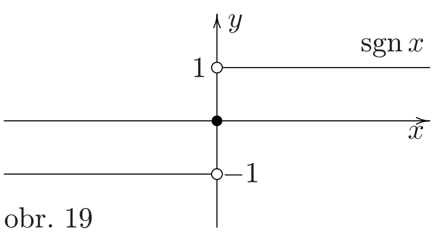
obr. 18

Funkce arkuskotangens je klesající, není ani sudá ani lichá. Graf je osově souměrný s grafem funkce $\operatorname{cotg} x$ podle přímky $y = x$, $P_y = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, vodorovná asymptota pro $x \to +\infty$ je osa x, pro $x \to -\infty$ je to přímka $y = \pi$.

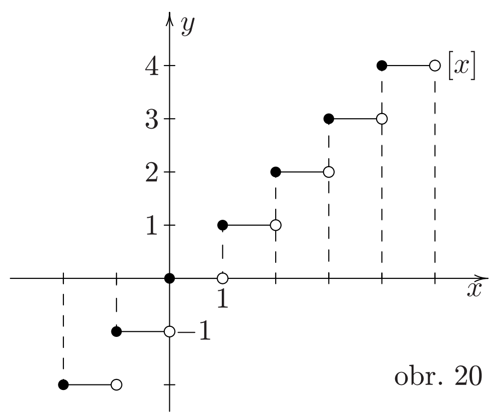
Tím je uzavřen přehled základních elementárních funkcí. Ostatní elementární funkce se z těchto základních dostanou aritmetickými operacemi a skládáním funkcí.
A ještě malý přídavek. Následující funkce se mezi elementární neřadí, ale často se s nimi můžete setkat. Je to tzv. znaménková funkce neboli funkce **signum** a funkce „**celá část**“.
Funkce **signum** je definována předpisem:

$$f\colon \quad y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0 \\ 0, & \text{pro } x = 0 \\ -1, & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$,
$\mathbf{H}_f = \{-1, 0, 1\}$.
Signum je funkce lichá a neklesající, graf je na obrázku 19.



obr. 19



obr. 20

Funkce **celá část** se obvykle značí hranatými závorkami kolem proměnné a je definována takto:

$$f: \quad y = [x] = n \text{ pro } x \in \langle n, n+1), \text{ kde } n \in \mathbf{Z}.$$

$\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$,
$\mathbf{H}_f = \mathbf{Z}$.
Funkce [x] je neklesající. Grafem jsou „schody“, levý krajní bod příslušné úsečky do grafu patří (plné kolečko), pravý krajní bod nikoli (prázdné kolečko).

Na závěr bych ráda poprosila laskavého čtenáře, aby mne upozornil na případné chyby (zpráva autorovi) jakéhokoli druhu, které v textu nalezne.