Dvojný integrál

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Ω – integrační oblast (část roviny xy)
f(x, y) – integrand

Geometrický význam: objem nepravidelného válce s podstavou Ω, shora seříznutého plochou $z = f(x,y)$.

Vlastnosti

1. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} c\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\cdot\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
2. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \left(f(x,y)+g(x,y)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
   – aditivita vzhledem k integrandu
3. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad \text{kde } \Omega = \Omega_1\cup\Omega_2$
   – aditivita vzhledem k integrační oblasti. (Ω_1, Ω_2 se nepřekrývají.)

Dvojný integrál přes obdélník

Je-li Ω obdélník $\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$, pak se dvojný integrál převede na dvojnásobný následovně:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \lceil\text{jiný zápis}\rfloor =$$

$$= \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Nejprve se počítá vnitřní integrál, pak vnější. Výsledek je *číslo* – neobsahuje proměnné x, y.

Je-li $f(x,y) = u(x)\cdot v(y)$ a $\Omega = \langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$, situace se zjednoduší:

$\displaystyle\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int\limits_c^d v(y)\,\mathrm{d}y$ – dostáváme součin jednoduchých integrálů, které se mohou počítat současně.

<u>Příklad 1</u>

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\iint\limits_{\Omega}(x^2\,y + xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad \Omega = \langle 2,5\rangle\times\langle 1,3\rangle\,.$

<u>*Řešení:*</u>

$$I = \int\limits_2^5 \mathrm{d}x\int\limits_1^3 (x^2y+xy^2)\,\mathrm{d}y = \int\limits_2^5 \mathrm{d}x\left[x^2\,\frac{y^2}{2} + x\,\frac{y^3}{3}\right]_1^3 = \int\limits_2^5\left[x^2\cdot\frac{9}{2} + x\cdot 9 - x^2\cdot\frac{1}{2} - x\cdot\frac{1}{3}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_2^5\left(4x^2 + \frac{26}{3}x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{26}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_2^5 = \frac{500}{3} + \frac{13\cdot 25}{3} - \frac{32}{3} - \frac{52}{3} = \underline{247}$$

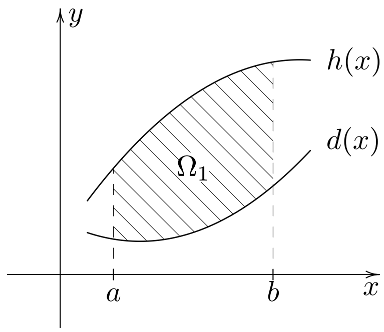
Nebo rychleji:

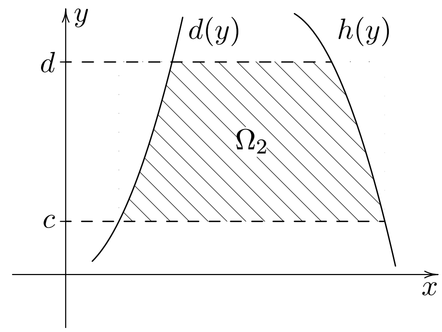
$$I = \int\limits_2^5 x^2\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_1^3 y\,\mathrm{d}y + \int\limits_2^5 x\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_1^3 y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{125}{3} - \frac{8}{3}\right)\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{25}{2} - \frac{4}{2}\right)\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{117}{3}\cdot 4 + \frac{21}{2}\cdot\frac{26}{3} = \underline{247}$$

Dvojný integrál přes obecnou oblast

Budeme uvažovat dva základní typy oblastí.





$\Omega_1 = \{[x,y]\,;\ a \le x \le b\,;\ d(x) \le y \le h(x)\}$ $\qquad$ $\Omega_2 = \{[x,y]\,;\ c \le y \le d\,;\ d(y) \le x \le h(y)\}$

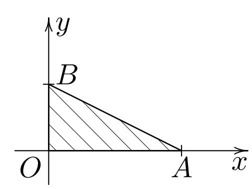
Fubiniova věta

Je-li $f(x,y)$ spojitá na Ω_1, pak $\displaystyle\iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Podobně pro $f(x,y)$ spojitou na Ω_2 je $\displaystyle\iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{d(y)}^{h(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

<u>Příklad 2</u>

Spočtěte $I = \displaystyle\iint\limits_{\Omega} (5x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je vnitřek trojúhelníku AOB, $A\,[2;0]$, $B\,[0;\,1]$.



<u>Řešení:</u>

Oblast Ω je možno chápat jako typ Ω_1, stejně jako Ω_2. Protože rovnice AB je $y = -x/2 + 1$, je $h(x) = -x/2 + 1$, $d(x) = 0$. Pak

$$I = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x/2} (5x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left[5x^2 y - xy^2\right]_0^{1-x/2}\,\mathrm{d}x =$$

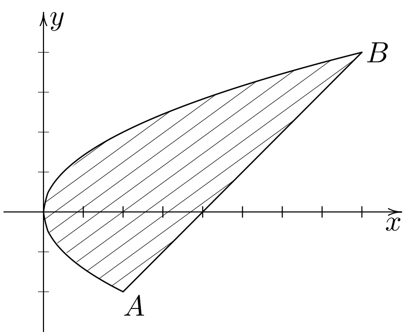
$$= \int\limits_0^2 \left[5x^2\left(1 - \frac{x}{2}\right) - x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[5x^2 - \frac{5x^3}{2} - x\left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-\frac{11}{4}x^3 + 6x^2 - x\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{11x^4}{16} + \frac{6x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -11 + 16 - 2 = \underline{3}.$$

Podobně, pokud zaměníme pořadí integrace, je $d(y) = 0,\ h(y) = 2 - 2y$ a

$$I = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-2y} (5x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x$$ – pilný čtenář si jistě dopočítá sám.

<u>Příklad 3</u>



Spočtěte $I = \iint\limits_\Omega (2x + 3y + 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a její tětivou AB; $A\,[2;-2]$; $B\,[8;4]$.

<u>Řešení:</u>

Aby nám k výpočtu stačil jeden dvojnásobný integrál, musíme použít pořadí integrace: $\int\limits_{-2}^{4} \mathrm{d}y \int\limits_{y^2/2}^{y+4} f(x,y)\,\mathrm{d}x$, kde $x = y + 4$ je rovnice tětivy.

$I = \int\limits_{-2}^{4} \mathrm{d}y \int\limits_{y^2/2}^{y+4} (2x + 3y + 1)\,\mathrm{d}x$ a dál už jen nepříjemné numerické počty. Výsledek je $I = 187{,}2$.

Neřešené příklady

Ω je obdélník:

1. $\iint\limits_\Omega (x^2y + 2y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;\quad \Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$ $\quad [8]$
2. $\iint\limits_\Omega \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;\quad \Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ $\quad \left[(\mathrm{e}-1)^2\right]$
3. $\iint\limits_\Omega \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;\quad \Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ $\quad \left[\frac{\pi}{12}\right]$
4. $\iint\limits_\Omega \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;\quad \Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ $\quad \left[\ln\frac{4}{3}\right]$
5. $\iint\limits_\Omega x\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;\quad \Omega = \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle$ $\quad [-4]$

Ω je typu Ω_1, nebo Ω_2:

1. $\iint\limits_\Omega \left(\frac{x}{y}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$ Ω je ohraničená křivkami: $y = x$, $xy = 1$, $x = 2$. $\quad \left[\frac{9}{4}\right]$

2. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená křivkami: $y = x^2$, $x = y^2$. $\left[\dfrac{33}{140}\right]$

3. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (2x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená křivkami: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$. $\left[\dfrac{27}{2}\right]$

4. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} 1 \cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená křivkami: $x + y = 1$, $y^2 = 2x + 1$. $\left[\dfrac{16}{3}\right]$

5. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \sin(x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená křivkami: $x = y$, $y = 0$, $y = \pi$. $[0]$

6. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená křivkami: $x = 0$, $x + y = 1$, $x - y = 1$. $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

7. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená křivkami: $x = 0$, $y = 1$, $x = y^2$. $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

8. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená křivkami: $x = 0$, $y^2 = 4 - 2x$. $[8]$

9. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená křivkami: $x = 2$, $y = x$, $y = 0$. $\left[\dfrac{8}{3}\right]$

10. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (2x - 3y + 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená kružnicí: $x^2 + y^2 = 4$. $[4\pi]$

11. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \sqrt{4x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; Ω je ohraničená křivkami: $x = 1$, $y = x$, $y = 0$. $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{9}\right]$