Diferenciální rovnice I. řádu

1. Separace proměnných

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice (dále budeme značit DR)

$y' \sin x + y \cos x = 0.$

Řešení:

Rovnice se řeší separací (oddělením) proměnných a následnou integrací. Druhý člen levé strany rovnice převedeme napravo, použijeme rovnosti $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ a rovnici vynásobíme $\mathrm{d}x$

$\sin x \,\mathrm{d}y = -y \cos x \,\mathrm{d}x.$ Dělíme $y \sin x$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\sin x}$ nyní obě strany zintegrujeme podle příslušných proměnných

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\sin x} \qquad \longrightarrow \qquad \ln|y| = -\ln|\sin x| + C$$

a máme řešení v implicitním tvaru. V tomto případě snadno získáme i řešení v explicitním tvaru. Na rovnici aplikujeme exponenciálu

$y = \pm \dfrac{\mathrm{e}^C}{\sin x},$ místo $\pm \mathrm{e}^C$ obvykle píšeme opět pouze C.

Obecné řešení dané DR v explicitním tvaru pak je: $y = \dfrac{C}{\sin x}.$

2. Rovnice s homogenní funkcí

Funkce $f(x, y)$ je homogenní stupně nula, jestliže pro libovolné $k \in \mathbf{R}$ platí:

$f(k\,x, k\,y) = f(x, y)$. DR je rovnice s homogenní funkcí, je-li možno ji upravit na tvar:

$y' = f(x, y)$, kde $f(x, y)$ je homogenní funkce stupně nula. A jak se taková rovnice řeší? Substitucí, kterou se převede na separovatelnou DR. Zde je ukázka.

Nalezněte obecné řešení DR

$x^2 y' = y^2 - xy + x^2$

Řešení:

Rovnici vydělíme x^2,

$y' = \dfrac{y^2 - xy + x^2}{x^2}.$ Tím jsme dostali na pravé straně homogenní funkci stupně nula.

Substitucí $y(x) = x\,u(x)$, kde $u(x)$ je nová neznámá funkce, přejde daná rovnice na rovnici separovatelnou. Dosadíme za y a za derivaci $y' = u(x) + x\,u'(x)$

$u + x\,u' = \dfrac{x^2 u^2 - x^2 u + x^2}{x^2}$ krátíme x^2 a dostáváme separovatelnou rovnici

$u'\,x = u^2 - 2u + 1,$ (u jsme odečetli). Proměnné odseparujeme

$\dfrac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ obě strany rovnice zintegrujeme podle příslušné proměnné

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$\dfrac{-1}{u-1} = \ln|x| + C$ a máme implicitní vyjádření funkce $u(x)$. Cílem však bylo najít funkci

$y(x)$. Provedeme tedy zpětnou substituci, několik kosmetických úprav a obecné řešení zadané rovnice v explicitním tvaru je tu

$$y(x) = x\left(1 - \frac{1}{\ln|x| + C}\right).$$

3. Lineární diferenciální rovnice I. řádu

je rovnice, ve které se neznámá funkce y a její derivace y' vyskytují pouze v první mocnině. Rovnice se dá upravit na tvar:

$y' + g(x)\, y = f(x)$, to je rovnice s pravou stranou $(f(x))$, neboli nehomogenní, příslušná homogenní rovnice (bez pravé strany) je:

$y' + g(x)\, y = 0$.

Postup řešení:

1) Nalezneme obecné řešení příslušné homogenní rovnice (neplést s rovnicí s homogenní funkcí), která je vždy separovatelná.

2) Obecné řešení rovnice s pravou stranou určíme metodou variace konstanty.

Příklad

Nalezněte obecné řešení rovnice

$$y' - y\,\frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x$$

Vyřešíme nejprve homogenní rovnici. Odseparujeme proměnné

$$y' = y\,\frac{\cos x}{\sin x}$$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x}$, obě strany rovnice zintegrujeme

$\ln|y| = \ln|\sin x| + C$ a po úpravě získáme obecné řešení homogenní rovnice

$y_h = C\,\sin x$. To bychom měli bod 1. Nyní bod 2. Řešení rovnice s pravou stranou předpokládáme ve tvaru

$y = C(x)\,\sin x$, kde $C(x)$ je neznámá funkce. Spočteme derivaci $y' = C'(x)\,\sin x + C(x)\,\cos x$ a dosadíme do původní rovnice.

$C'(x)\,\sin x + C(x)\,\cos x - C(x)\,\sin x\,\dfrac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x$. Druhý a třetí člen levé strany se vyruší a dostaneme rovnici pro funkci $C(x)$

$C'(x)\,\sin x = 2\sin x$, z toho $C'(x) = 2$, a tedy $C(x) = \displaystyle\int 2\,\mathrm{d}\,x = 2x + K$, K je integrační konstanta. Obecné řešení původní rovnice je

$y = (2x + K)\,\sin x = y_p + y_h$ tj. partikulární řešení rovnice s pravou stranou + obecné řešení homogenní rovnice. Tuto strukturu má obecné řešení lineární DR vždy.

Příklady

Nalezněte obecné řešení dané diferenciální rovnice, pokud možno v explicitním tvaru.

1. a) $y' = \dfrac{y}{x}$, b) $y' = -\dfrac{x}{y}$, c) $y' = y\,\mathrm{cotg}x$ d) $y' = 2\sqrt{y}$, e) $y' + x\,y = x$.

2. a) $y' = \dfrac{x-2}{y^2}$, b) $y' = \dfrac{y-1}{x(x-1)}$, c) $y' = \dfrac{2x-1}{1+2y}$, d) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$.

3. a) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$, b) $y' = \dfrac{y^2}{x(y-x)}$, c) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$, d) $x\,y' - y = \sqrt{x^2+y^2}$.

4. a) $y' + 3y = \mathrm{e}^{2x}$, b) $y' + y = \cos x$, c) $2y + (y^2 - 6x)\,y' = 0$, d) $x\,y' - \dfrac{y}{x+1} = x$.

5. a) $x^2\,y' + 3 - 2xy = 0$, b) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy\,(1+x^2)}$, c) $x^3 y' = y\,(y^2 + x^2)$,

d) $\dfrac{xy' - y}{x} = \tan\dfrac{y}{x}$.

Výsledky *(Prosím o upozornění, pokud se vyskytne nějaká nesrovnalost.)*

1. a) $y = Cx$, **b)** $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$, **c)** $y = C\sin x$,

d) $y = (x+C)^2$ pro $x \geq -C$, **e)** $y = 1 - C\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

2. a) $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(x-2)^2 + C}$, **b)** $y = 1 + C\,\dfrac{x-1}{x}$, **c)** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = C$,

d) $C = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.

3. a) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C$, **b)** $Cy = \mathrm{e}^{y/x}$, **c)** $x^2 + y^2 = Cy$, **d)** $x^2 = C^2 + 2Cy$.

4. a) $y = C\,\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{5}$, **b)** $y = C\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)$, **c)** $y^2 - 2x = Cy^3$,

d) $y = \dfrac{x}{x+1}\,(C + x + \ln|x|)$.

5. a) $y = Cx^2 + \dfrac{1}{x}$, **b)** $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$ **c)** $x = C\exp\left(-\dfrac{x^2}{2y^2}\right)$, **d)** $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$.

Na zbývajícím prostoru vyřešíme poslední

Příklad

$\dfrac{xy' - y}{x} = \tan\dfrac{y}{x}$.

Řešení: Jde o rovnici s homogenní funkcí, což je vidno z úpravy

$y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$.

Přejdeme k nové neznámé funkci (provedeme substituci) $u = \dfrac{y}{x}$, z toho $y' = u'x + u$ a dosadíme do původní rovnice.

$u'x + u = u + \tan u$

$u'x = \tan u$ Odseparujeme proměnné

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\tan u} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ a integrujeme

$\displaystyle\int \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{\sin u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

$\ln|\sin u| = \ln|x| + C$ Odlogaritmujeme.

$\sin u = C\,x$ a vrátíme se k původní neznámé funkci $y(x)$.

$\sin\dfrac{y}{x} = C\,x$ Řešení jsme dostali v implicitním tvaru.