Determinanty

Helena Říhová

FBMI

1. listopadu 2010

Obsah

Permutace

Definice

▶ Permutace (pořadí) n prvků je prosté zobrazení množiny $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ na množinu M.

Píšeme: $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$, kde $k_i \in M$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. ◀

Věta ▶ Počet všech různých permutací n prvků je $n!$. ◀

$(n! = n\,(n-1)\ldots 2 \cdot 1)$

Poznámka: Někdy se permutace zapisuje jen druhým řádkem.

Příklad: ▶ Napište všechny permutace 3 a 4 prvků

Řešení:

3 prvků: 1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1

4 prvků: 1 2 3 4 1 2 4 3 1 3 2 4 1 3 4 2 1 4 3 2 1 4 2 3

... 4 3 2 1 - celkem 24 permutací. ◀

Inverze v permutaci

Definice

▶ Je dána permutace $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$, kde $k_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Inverze v permutaci je taková dvojice k_i, k_j, pro niž $i < j$ a $k_i > k_j$. Tj. ve druhém řádku permutace je větší číslo před menším. ◀

Poznámka: Identická permutace $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ nemá žádnou inverzi.

Příklad: ▶ Určete inverze u permutací 3 prvků.

Řešení: Napíšeme postupně všech 6 permutací (píšeme pouze druhý řádek) a číslo pod nimi bude zjištěný počet inverzí.

permutace	(1 2 3)	(1 3 2)	(2 1 3)	(2 3 1)	(3 1 2)	(3 2 1)
počet inverzí	0	1	1	2	2	3

Definice

▶ Znaménko permutace $\operatorname{sgn} P = (-1)^{\text{počet inverzí}}$

$\operatorname{sgn} P = +1$ – sudý počet inverzí P – sudá permutace
$\operatorname{sgn} P = -1$ – lichý počet inverzí P – lichá permutace

Znaménko permutace

Pro daný počet prvků je vždy polovina permutací sudých a polovina lichých.

Věta ▶ Prohození dvojice prvků v permutaci (tzv. transpozice) změní znaménko permutace. ◀

Permutační definice determinantu

Definice

- Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice typu (n, n). Pak číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}} \operatorname{sgn} \mathrm{P} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$$

se nazývá determinant $\mathbf{A}$ a značí se $\det \mathbf{A}$, nebo $|\mathbf{A}|$.

Výpočet determinantu matice 2×2

Příklad: ▶ Vypočítejte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Řešení:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \mathrm{P} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}\, a_{22} + \operatorname{sgn} \mathrm{P} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}\, a_{21} =$$

$$= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}\,.$$

◀

Výpočet determinantu matice 3×3

Z permutační definice determinantu nám vyjde determinant 3×3 matice:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - \\ -(a_{13}\,a_{22}\,a_{31} + a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{11}\,a_{23}\,a_{32})$$

Komu by se chtělo si to pamatovat. Ale pan Sarrus nám vymyslel hezkou mnemotechnickou pomůcku. Tady je:
k schematu 3×3 matice se zprava přidají první dva sloupce matice (viz obrázek). A pak už stačí tvořit patřičné součiny.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \quad - \quad \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Sarrusovo pravidlo

Se znaménkem plus jsou ty, které jdou shora zleva doprava dolů (po hlavní diagonále), znaménko minus mají součiny prvků shora zprava doleva dolů (na vedlejší diagonále).

Ve čtvercové matici typu (n, n) se úhlopříčka spojující prvky $a_{11},\ a_{nn}$ nazývá hlavní diagonála, úhlopříčka, která spojuje prvky $a_{1n},\ a_{n1}$, je vedlejší diagonála.

! Sarrusovo pravidlo je použitelné pouze pro 3×3 matici !

Příklad: ▶ Matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{kde } a_{ii} \neq 0 \text{ pro } \forall\, i \;\; a_{ij} = 0 \text{ pro } i > j,$$

má $\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ ◀

Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále.

Vlastnosti determinantu

V1) Jestliže se matice **B** od matice **A** liší jen prohozením dvou řádků (v permutaci → transpozicí), pak $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

V2) Jsou-li v **A** dva řádky stejné, nebo jeden řádek nulový pak $\det \mathbf{A} = 0$.

V3) $$\det \begin{bmatrix} \cdots \\ k\,a_{i*} \\ \cdots \end{bmatrix} = k \cdot \det \begin{bmatrix} \cdots \\ a_{i*} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

V4) $$\det \begin{bmatrix} \cdots \\ a_{i*} \\ \cdots \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \cdots \\ b_{i*} \\ \cdots \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cdots \\ a_{i*} + b_{i*} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

Determinanty se liší pouze i-tým řádkem.

Vlastnosti determinantu

$$\text{V5)} \quad \det \begin{bmatrix} \cdots \\ a_{i*} + k \cdot a_{j*} \\ \cdots \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cdots \\ a_{i*} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

Závěr:

- Determinant se nezmění, přičteme-li k řádku násobek jiného řádku.
- Determinant změní znaménko, prohodíme-li vzájemně dva řádky.

$\Rightarrow$ Gaussovou eliminací lze převést výpočet determinantu obecné čtvercové matice na výpočet determinantu trojúhelníkové matice.

Věty o determinantech

Věta ▶ Čtvercová matice je regulární $\Leftrightarrow$ $\det \mathbf{A} \neq 0$. ◀

Závěr:

$\mathbf{A}$ je regulární $\Leftrightarrow$ řádky $\mathbf{A}$ jsou LNZ $\Leftrightarrow$ $\det \mathbf{A} \neq 0$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $h(\mathbf{A}) =$ počet řádků $\Leftrightarrow$ existuje $\mathbf{A}^{-1}$.

Věta ▶ Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ je $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.
Tj. co platilo pro řádky, platí i pro sloupce. ◀

Definice

- Algebraický doplněk prvku a_{ij} matice **A** je číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}',$$

kde matice $\mathbf{A}'$ vznikne z matice **A** vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce

Věta ▶ pro čtvercovou matici **A** typu (n, n) je

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad - \text{ rozvoj podle } i - \text{tého řádku.}$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad - \text{ rozvoj podle } j - \text{tého sloupce.}$$

◀

Věty

Věta (Laplaceova) ▶ Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice. Pak

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

◀

Věta ▶ Nechť $\mathbf{A}$ je regulární. Pak

a) $\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$,

b) $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} (A_{ij})^T$ ◀

Příklad: ▶ Určete $\mathbf{A}^{-1}$ pro $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Řešení:

$$\det \mathbf{A} = a\,d - b\,c.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

◀