Derivace

Helena Říhová

FBMI

15. května 2010

Definice derivace

Definice

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v okolí bodu x (včetně x). Potom derivací funkce f v bodě x nazveme limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Jiné značení:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

Derivace funkce v bodě x je číselně rovna směrnici tečny ke grafu funkce v bodě x.

- <u>Příklad:</u> Určete derivaci funkce $f(x) = x^2$.
- *Řešení*:

$$(x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

- $$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

A můžeme si zaznamenat: $(x^2)' = 2x$.

- Příklad: Určete derivaci funkce $f(x) = x^2$.
- *Řešení*:

$$(x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

-

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

A můžeme si zaznamenat: $(x^2)' = 2x$.

- Příklad: Určete derivaci funkce $f(x) = x^2$.
- *Řešení*:

$$(x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

- $$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

A můžeme si zaznamenat: $(x^2)' = 2x$.

Derivace elementárních funkcí

$$(konst)' = 0$$

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}, \quad n \in \mathbf{R}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad a \neq 1,\ a > 0$$

Derivace elementárních funkcí

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Pravidla pro derivování

Předpokládáme, že funkce $f,\ g$ mají derivaci v bodě x. Potom platí následující vztahy.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \\[1ex] 2)\ (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbf{R} \end{array}\right\} \text{Derivování je lineární operace.}$$

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{kde } g(x) \neq 0$

Derivace složené funkce

Předpokládáme, že funkce f má derivaci v bodě u, funkce g má derivaci v bodě x a $g(x) = u$. Potom složená funkce $f \circ g$ má derivaci v bodě x a platí:

$$(f(g(x)))' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = {f_g}' \cdot {g_x}'$$

Derivace inverzní funkce

Je-li $f: I \to J$ prostá a spojitá na intervalu I a má-li derivaci v bodě $y \in I$, přičemž $f'(y) \neq 0$, pak její inverzní funkce $f^{-1}: J \to I$ má derivaci v bodě $x \in J,\ x = f(y)$ a platí:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)}, \quad \text{kde } y = f^{-1}(x)$$

Derivace jsou vždy podle příslušné proměnné.

- Příklad: Určete $(\ln x)'$, víte-li, že $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
- *Řešení*:

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^y$$

- $$(\ln x)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \lceil \text{za } y \text{ dosadíme } \ln x \rfloor$$

- $$= \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad \text{pro } x > 0$$

Máme další vzoreček $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

- Příklad: Určete $(\ln x)'$, víte-li, že $(e^x)' = e^x$.
- *Řešení*:

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

- $$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \lceil \text{za } y \text{ dosadíme } \ln x \rfloor$$
- $$= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad \text{pro } x > 0$$

Máme další vzoreček $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

- <u>Příklad:</u> Určete $(\ln x)'$, víte-li, že $(e^x)' = e^x$.
- *Řešení*:

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

- $$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \lceil \text{za } y \text{ dosadíme } \ln x \rfloor$$

- $$= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad \text{pro } x > 0$$

Máme další vzoreček $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

- Příklad: Určete $(\ln x)'$, víte-li, že $(e^x)' = e^x$.
- *Řešení*:

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

- $$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \lceil \text{za } y \text{ dosadíme } \ln x \rfloor$$

- $$= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad \text{pro } x > 0$$

Máme další vzoreček $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

n-tá derivace

Definice

Předpokládáme, že f má derivaci v nějakém okolí $U(x)$ a f' má derivaci v x: $(f')'(x) \overset{ozn}{=} A$. Pak číslo A nazveme druhou derivací funkce f v bodě x a značíme:

$$A = f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

Podobně n- tá derivace

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$$

Definiční obory musí splňovat: $D_f \supset D_{f'} \supset D_{f''} \supset \ldots \supset D_{f^{(n)}}$

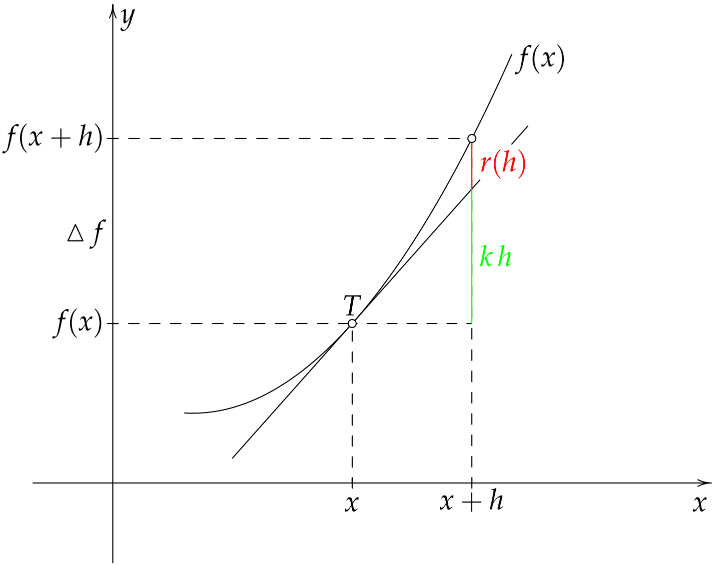
derivace a spojitost

Věta

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci v bodě x_0, pak je v tomto bodě spojitá.

Opačné tvrzení neplatí. Např. funkce $f(x) = |x|$ je v bodě $x = 0$ spojitá, ale (oboustranná) derivace v tomto bodě neexistuje.

Diferenciál funkce



Diferenciál funkce - definice

Definice

Říkáme, že funkce f má v bodě $x \in D_f$ diferenciál, jestliže existuje číslo k takové, že pro funkci

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - k\,h \quad \text{je} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Potom diferenciál funkce f v bodě x je

$$\mathrm{d}f_x(h) = \mathrm{d}f(x) = k\,h$$

Diferenciál funkce - výpočet

Věta

Funkce f má v bodě x diferenciál, právě když existuje vlastní derivace $f'(x)$. Pak $k = f'(x)$, a tedy

$$\mathrm{d}f_x(h) = f'(x)\,h.$$

Důsledek

Přímka, kterou nahrazujeme křivku grafu funkce, je tečna a diferenciál je přírůstek na tečně, při posunutí z bodu x do bodu $(x+h)$.

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,h$$

Ježto diferenciál funkce $g(x) = x$ je h, tj. $\mathrm{d}g = \mathrm{d}x = h$, obvykle píšeme

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce spojité na $\langle a,\, b\rangle$

Funkce, která má derivaci v každém bodě uzavřeného intervalu $\langle a,\, b\rangle$, je na $\langle a,\, b\rangle$ spojitá. Následují vlastnosti takových funkcí.

Věta

Mějme funkci f spojitou na $\langle a,\, b\rangle$, potom platí:

1) f je omezená na $\langle a,\, b\rangle$; tj. $\exists\, k > 0$, že $|f(x)| < k$ pro $\forall\, x \in \langle a,\, b\rangle$,

2) f nabývá na $\langle a,\, b\rangle$ svého maxima; tj. $\exists\, c \in \langle a,\, b\rangle$,
že $f(c) \geq f(x)$ pro $\forall\, x \in \langle a,\, b\rangle$.

3) f nabývá na $\langle a,\, b\rangle$ svého minima; tj. $\exists\, d \in \langle a,\, b\rangle$,
že $f(d) \leq f(x)$ pro $\forall\, x \in \langle a,\, b\rangle$.

4) Označíme-li m minimum funkce f na $\langle a,\ b\rangle$ a

M maximum funkce f na $\langle a,\ b\rangle$,

pak funkce f nabývá na $\langle a,\ b\rangle$ všech hodnot z intervalu $\langle m,\ M\rangle$,

tj. ke $\forall\, d \in \langle m,\ M\rangle\ \exists\, c \in \langle a,\ b\rangle$ takové, že $f(c) = d$.

Důsledek

Je-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, musí $\exists\, c \in (a,\ b)$, že $f(c) = 0$; jinými slovy rovnice $f(x) = 0$ má na $(a,\ b)$ alespoň jeden kořen.

Derivace a monotónie

Věta

Předpokládáme, že $\exists f'(c)$.

Potom funkce f je v bodě c $\begin{array}{lll} \text{rostoucí,} & \text{je} - \text{li} & f'(c) > 0, \\ \text{klesající,} & & f'(c) < 0. \end{array}$

Je-li první derivace funkce kladná (záporná) na celém intervalu, je funkce na tomto intervalu rostoucí (klesající).

Věta o střední hodnotě, její předchůdkyně a následovnice

Francouzský matematik Michel Rolle a jeho

Věta

Máme funkci, která splňuje:

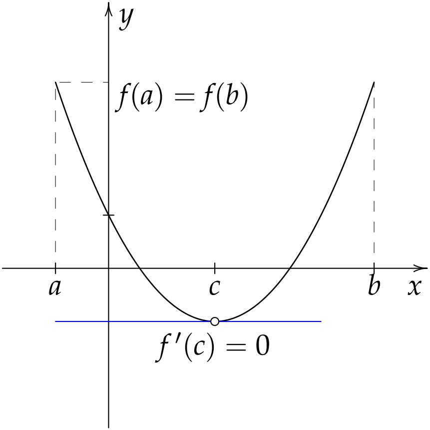
1) $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$.

2) Pro $\forall\, x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$ konečná nebo nekonečná.

3) $f(a) = f(b)$

Potom v intervalu (a, b) $\exists$ alespoň jeden bod c, že $f'(c) = 0$
(tj. bod, v němž tečna ke grafu funkce je rovnoběžná s osou x).

Rollova věta



Lagrangeova věta (věta o střední hodnotě)

Další francouzský matematik, Joseph Louis Lagrange má rovněž větu. Zde je.

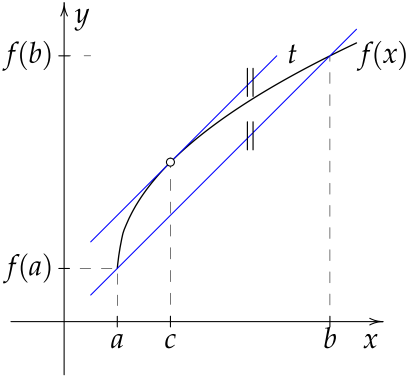
Věta

Máme funkci f , která je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a v každém bodě $x \in (a, b)$ $\exists f'(x)$ konečná nebo nekonečná. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricky to znamená, že na (a, b) existuje bod, v němž je tečna ke grafu funkce rovnoběžná se sečnou procházející body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$ (viz obrázek).

Lagrangeova věta



Cauchyova věta

I poslední do třetice Augustin Louis Cauchy byl Francouz. Jeho jméno nese

Věta (Cauchyova)

Máme funkce $f,\ g$, které jsou spojité na $\langle a,\ b\rangle$ a mají derivace v každém bodě $(a,\ b)$, přičemž $g'(x) \neq 0$ a je konečná pro $\forall\, x \in (a,\ b)$.
Potom $\exists\, c \in (a,\ b)$, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

l'Hospitalovo (Bernoulliovo) pravidlo

Pod následující tvrzení se podepsal další Francouz
Guillaume de l'Hospital, ale autorem je údajně švýcarský matematik
Johann Bernoulli.

l'Hospitalovo (Bernoulliovo) pravidlo

Máme funkce $f,\ g$, které splňují:

1) Jsou spojité v nějakém $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$.

2) Existují derivace $f',\ g'$ v $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, přičemž $g'(x) \neq 0$ a konečná.

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

4) Existuje konečná nebo nekonečná $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

l'Hospitalovo (Bernoulliovo) pravidlo

Potom existuje i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

l'Hospitalovo (Bernoulliovo) pravidlo

- Příklad: Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$
- *Řešení*: Funkce splňuje podmínky pro l'Hospitalovo (Bernoulliovo) pravidlo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} =$$

- $$= \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

A je hotovo.

l'Hospitalovo (Bernoulliovo) pravidlo

- Příklad: Určete $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$
- *Řešení*: Funkce splňuje podmínky pro l'Hospitalovo (Bernoulliovo) pravidlo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} =$$

- $$= \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

  A je hotovo.

- Příklad: Určete $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$
- *Řešení*: Funkce splňuje podmínky pro l'Hospitalovo (Bernoulliovo) pravidlo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} =$$

- $$= \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

A je hotovo.

Lokální extrémy

Definice

Funkce f má v bodě $c \in D_f$ lokální $\begin{matrix} \textit{minimum}, \\ \textit{maximum}, \end{matrix}$ jestliže $\exists \ \mathring{U}_\delta(c) \subset D_f$

takové, že pro $\forall \, x \in \mathring{U}_\delta(c)$ je $\begin{matrix} f(x) \geq f(c) \\ f(x) \leq f(c) \end{matrix}$

V případě ostrých nerovností mluvíme o ostrém lokálním extrému.

Věta

Má-li funkce f v bodě c lokální extrém a existuje $f'(c)$, pak $f'(c) = 0$.
Bod, v němž je první derivace nulová, se nazývá stacionární.

Konkávnost, konvexnost

Definice

Funkce f je v bodě $c \in D_f$ konkávní / konvexní, jestliže $\exists \, \mathring{U}_\delta(c)$ takové,

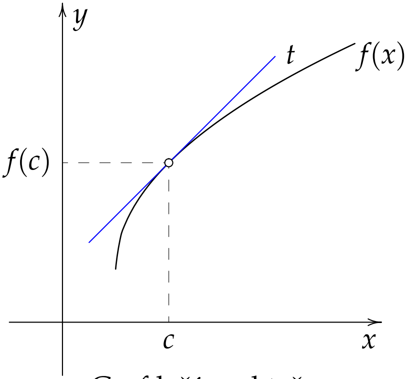
že pro $\forall x \in \mathring{U}_\delta(c)$ je

$$f(x) < f(c) + f'(c)(x-c)$$
$$f(x) > f(c) + f'(c)(x-c)$$

.

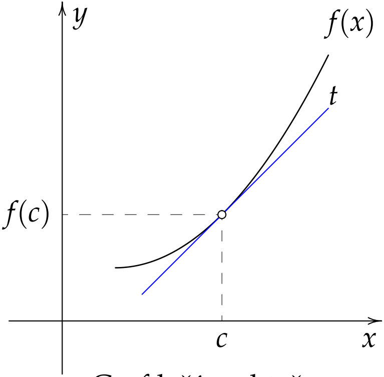
Konkávnost, konvexnost

$$f(x) < f(c) + f'(c)(x-c), \quad \text{funkce je konkávní.}$$



Graf leží pod tečnou

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x - c), \quad \text{funkce je konvexní.}$$



Graf leží nad tečnou

Děkuji za pozornost