Číselné řady

Zjistěte, zda následující řady konvergují, nebo divergují.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-1}\right)^n$, 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$, 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}\right)^n$, 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$,

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{10+2^n}$, 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+2^n}$, 7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$, 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2 3^{-n}$.

Výsledky:

1) Konverguje (limitní odmocninové kritérium).
2) Konverguje (limitní podílové kritérium).
3) Konverguje (limitní odmocninové kritérium).
4) Konverguje (limitní podílové kritérium).
5) Diverguje, není splněná nutná podmínka: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
6) Konverguje (limitní podílové kritérium).
7) Konverguje (limitní podílové kritérium).
8) Konverguje (limitní podílové kritérium).

Geometrická řada

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1}$, q je kvocient. Řada konverguje pro $|q|<1$ a má součet $s=\dfrac{a}{1-q}$.

Vyřešte rovnice.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}=\frac{4x-3}{3x-4}$,

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^{2n}=\frac{1}{3}$.

Řešení: **1)**

Jde o geometrickou řadu s kvocientem $q=\left|\dfrac{2}{x}\right|$, která pro $\left|\dfrac{2}{x}\right|<1$, tj. $|x|>2$ konverguje a má součet $s=\dfrac{1}{1-\frac{2}{x}}$. Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{1}{1-\dfrac{2}{x}}=\frac{4x-3}{3x-4}.$$

Po běžných úpravách dostaneme:

$$x^2-7x+6=0.$$

Poslední rovnici řeší: $x_1=1$, které však nesplňuje podmínku konvergence řady a $x_2=6$, jež je zároveň řešením původní rovnice.
Závěr: daná rovnice má jediné řešení $x=6$.
2) Podobně jako v předchozím případě získáme řešení: $x_1=-1.5$, $\quad x_2=-2.5$; obě vyhovují.