LINEÁRNÍ ALGEBRA

příklady k procvičení

Obsah

1 Lineární (pod)prostory

1.1 Příklady

1) Je dán lineární prostor $\mathbf{R}^3$ s operací sčítání $(a,b,c)+(d,e,f) = (a+d, b+e, c+f)$ a násobení reálným číslem $\alpha \cdot (a,b,c) = (\alpha\, a, \alpha\, b, \alpha\, c)$. Zjistěte, zda následující podmnožiny $M \subseteq \mathbf{R}^3$ jsou podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$.

a) $M = \{(a,b,c);\ a \leq b,\ c \text{ libovolné}\}$
b) $M = \{(a,b,0);\ a,\ b \text{ libovolné}\}$
c) $M = \{(a,b,c);\ b = c,\ a \text{ libovolné}\}$
d) $M = \{(a,b,c);\ c = 2b - 3a,\ a,\ b \text{ libovolné}\}$
e) $M = \{(a,b,c);\ b = a + 2,\ a,\ c \text{ libovolné}\}$

1.1.1 Výsledky:

1) Stačí ověřit uzavřenost množiny M na operace sčítání a násobení, tj. ověřit, že výsledek součtu dvou prvků z M je prvek z M a totéž pro násobení reálným číslem.
a) Množina M není podprostor, protože není uzavřená na násobení. (Násobením nerovnosti záporným číslem se nerovnost obrací.)
b) Množina M je podprostor.
c) Množina M je podprostor.
d) Množina M je podprostor.
e) Množina M není podprostor, protože není uzavřená ani na sčítání, ani na násobení a rovněž nemá nulový prvek.

2 Lineární (ne)závislost vektorů

2.1 Příklady

1) Zjistěte, zda vektory $(3,1,4),\ (1,1,-1),\ (5,3,3)$ jsou lineárně (ne)závislé.

2) Vyjádřete vektor $\mathbf{x} = (7,2,-5)$ jako lineární kombinaci vektorů $(2,1,0),\ (0,3,2),\ (1,1,-1)$. Za jakých podmínek má úloha řešení?

3) Nalezněte všechny hodnoty parametru $p \in \mathbf{R}$ tak, aby vektory
$(1,1,-1,0),\ (2,0,1,2),\ (3,-2,1,p),\ (6,p,-1,-6)$ byly lineárně závislé.

4) Ověřte, že vektory $\mathbf{a} = (1,0,1),\ \mathbf{b} = (2,1,-1),\ \mathbf{c} = (1,1,2)$ jsou lineárně nezávislé a vyjádřete vektor $\mathbf{x} = (1,0,5)$ jako jejich lineární kombinaci.

5)
a) Definujte lineární nezávislost skupiny vektorů.
b) Je dán lineární prostor všech polynomů stupně nejvýše 2. Rozhodněte, zda skupina polynomů $p_1(x) = 2 + x,\ p_2(x) = 3x + x^2,\ p_3(x) = 1 - x^2,\ p_4(x) = 2 - 3x$ z tohoto prostoru je lineárně (ne)závislá. Své tvrzení zdůvodněte.

6)
a) Definujte lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}, \cdots,\ \mathbf{v_n}$.
b) Dány vektory $\mathbf{u} = (3,-1,-2),\ \mathbf{v} = (1,2,-3),\ \mathbf{w} = (3,-8,5)$. Určete koeficienty lineární kombinace $\alpha,\ \beta$, aby platilo: $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Jsou vektory $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}$ lineárně (ne)závislé?

7) Rozhodněte, pro které $p \in \mathbf{R}$ jsou vektory $\mathbf{u} = (1,\ -1,\ -2,\ 0),\ \mathbf{v} = (-1,\ 2,\ -3,\ p)$, $\mathbf{w} = (1,\ -4,\ 13,\ 6)$ lineárně nezávislé.

2.1.1 Výsledky:

1) Vektory jsou lineárně nezávislé.

2) Koeficienty lineární kombinace $k_1,\ k_2,\ k_3$ jsou po řadě 2, -1, 3.

3) $p_1 = -2,\ p_2 = \dfrac{22}{3}$.

4) $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

5a) Skupina vektorů je lineárně nezávislá, jestliže pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů je rovna nulovému vektoru. Nebo jinak: vektory jsou lineárně nezávislé, jestliže žádný z nich nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.
5b) Polynomy jsou lineárně závislé, protože je jich víc než prvků báze daného prostoru, tedy víc než 3. (Bázi tvoří např. polynomy: 1, x, x^2.)

6a) Lineární kombinace vektorů $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}, \cdots,\ \mathbf{v_n}$ je vektor $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i\, \mathbf{v_i}, \quad k_i \in \mathbf{R}$.

6b) $\alpha = 2$, $\beta = -3$. Vektory jsou lineárně závislé, ježto jeden je lineární kombinací zbylých.

7) Vektory jsou lineárně nezávislé pro všechna $p \neq -2$.

3 Báze

3.1 Příklady

1) Vektory $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3$ tvoří bázi $\mathcal{A}$ v $\mathbf{R}^3$.
a) Přesvědčte se, že vektory $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3$ tvoří rovněž bázi v $\mathbf{R}^3$, označíme ji $\mathcal{B}$.
b) Souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathcal{A}$ jsou $(a, b, c)_{\mathcal{A}}$. Nalezněte souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathcal{B}$.

2) Přesvědčte se, že vektory $\mathbf{a}_1 = (1,\ 1,\ 1),\ \mathbf{a}_2 = (1,\ 1,\ 0),\ \mathbf{a}_3 = (1,\ -1,\ 0)$ tvoří bázi v $\mathbf{R}^3$ a nalezněte souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (1,\ 0,\ -1)$ v této bázi.

3)
a) Definujte bázi lineárního prostoru.

b) Zjistěte, které z následujících skupin vektorů tvoří bázi v příslušném lineárním prostoru.
1. $\mathbf{a} = (1, 1, 0),\ \mathbf{b} = (0, 1, 1),\ \mathbf{c} = (1, 1, 1), \mathbf{d} = (1, 2, -2)$.
2. $\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4),\ \mathbf{b} = (2, 3, 4, 5),\ \mathbf{c} = (0, 1, 1, 1)$.
3. $\mathbf{a} = (1, 2, 3),\ \mathbf{b} = (0, 1, 1),\ \mathbf{c} = (4, 5, 6)$.
4. $\mathbf{a} = (-1, 1, 2),\ \mathbf{b} = (3, 1, 1),\ \mathbf{c} = (-3, 3, 6)$.

Své tvrzení zdůvodněte.

4) Je dán lineární prostor všech polynomů stupně nejvýše 2. Rozhodněte, zda skupina polynomů $p_1(x) = 1 + 2x^2,\ p_2(x) = x - x^2,\ p_3(x) = 3 + x$ tvoří bázi tohoto prostoru. Své tvrzení zdůvodněte.

5)
a) Je dán lineární prostor P všech polynomů nejvýše druhého stupně. Tvoří polynomy $p_1(x) = 1 + x + x^2,\ p_2(x) = 2 + 2x,\ p_3(x) = 3$ bázi v tomto prostoru? Zdůvodněte.
b) Utvořte takovou lineární kombinaci zadaných polynomů, aby výsledný polynom byl $p(x) = 2 - x + x^2$.

3.1.1 Výsledky:

1a) Utvoříme lineární kombinaci zkoumaných vektorů a položíme ji rovnu nulovému vektoru. Dostaneme soustavu rovnic pro koeficienty lin. kombinace. Zjistíme, že soustava má pouze triviální řešení, tedy vektory jsou LNZ. A protože je jich tolik, kolik je prvků báze, tvoří rovněž bázi.
1b) Souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathcal{B}$ jsou $((a+b)/2,\ (a-b)/2,\ c)_{\mathcal{B}}$.

2) Souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v dané bázi jsou $(-1,\ 3/2,\ 1/2)$.

3a) Vektory $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$, tvoří bázi v lineárním prostoru $\mathbf{L}$, jestliže jsou lineárně nezávislé a každý další vektor z prostoru $\mathbf{L}$ je jejich lineární kombinací.
3b) První skupina vektorů netvoří bázi, neb je LZ, protože vektorů je víc, než je dimenze prostoru, druhá skupina nemůže být bází, neboť vektorů je málo (musí být čtyři), třetí skupina tvoří bázi, anžto je LNZ a vektorů je právě akorát, čtvrtá skupina netvoří bázi, neb je LZ (třetí vektor je násobkem prvního).

4) Polynomy jsou lineárně nezávislé a je jich právě akorát, neboť dimenze daného lineárního prostoru je 3. Standardní báze tohoto prostoru je tvořena polynomy: $1,\ x,\ x^2$.

5a) Polynomy tvoří bázi v P, protože jsou lineárně nezávislé a jejich počet je roven dimenzi prostoru P.
5b) $p(x) = p_1(x) - p_2(x) + p_3(x)$.

4 Matice

4.1 Příklady

1) Vyřešte maticovou rovnici $\quad 3\,\mathbf{AX} - \mathbf{B} = 2\,\mathbf{CX}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 29 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2) Rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce spočtěte determinanty:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Existují k maticím $\mathbf{A},\ \mathbf{B}$ inverzní matice?

3) V matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a & b \end{bmatrix}$ určete všechny hodnoty čísel $a,\ b$ tak, aby matice byla singulární.

4) Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, určete inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$.

5) Vyřešte maticovou rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{AX} = 2\mathbf{B} + 2\mathbf{X}, \text{ kde } \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

6) Vyřešte maticovou rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{XA} = 2\mathbf{B} + 3\mathbf{X}, \text{ kde } \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

7) Je dána matice $\mathbf{A}$, určete inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\text{a)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

8) Vypočítejte matici $\mathbf{C}^{-1}$, je-li $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

9) Vypočítejte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10) Určete hodnotu čísla $a \in \mathbf{R}$ tak, aby hodnost matice $\mathbf{A}$ byla 3. Kolik je v tom případě hodnota determinantu matice $\mathbf{A}$? Zdůvodněte.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

11)
a) Určete hodnotu čísla $q \in \mathbf{R}$ tak, aby hodnost matice $\mathbf{A}$ byla 2.
b) Existuje k této matici (s vypočítanou hodnotou q) matice inverzní? Zdůvodněte.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & 2q & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -q \end{bmatrix}.$$

12) Vyřešte maticovou rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{AX} - 2\mathbf{A} = 2\mathbf{X} - 3\mathbf{AB}, \quad \text{kde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

13)
a) Co je algebraický doplněk prvku a_{ij} čtvercové matice $\mathbf{A}$?
b) Rozvojem podle 2. sloupce vypočítejte

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

14) Vyřešte danou maticovou rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{X} = \mathbf{AX}, \text{ kde } \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.1.1 Výsledky:

1) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2) $\det \mathbf{A} = 22$, $\det \mathbf{B} = -3$. Inverzní matice existují, protože determinanty jsou nenulové.

3) $b = 3a - 12, \quad a \in \mathbf{R}$.

4) $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

5) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

6) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -17/2 & -5/2 \end{bmatrix}$

7) a) $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8) Stačí spočítat $\mathbf{A}^{-1}$, potom $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Vychází $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

9) Rozvojem podle kteréhokoli řádku nebo sloupce dostaneme $\det\mathbf{A} = 1$. Obnáší to spočítat 2 determinanty 3x3.

10) $a = \pm 2, \quad \det\mathbf{A} = 0$, protože matice $\mathbf{A}$ je singulární.

11a) $q = 1$,
11b) Inverzní matice neexistuje, protože řádky matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně závislé, matice je tedy singulární.

12) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -11/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

13a) Algebraický doplněk prvku a_{ij} čtvercové matice $\mathbf{A}$ je znaménkem $(-1)^{i+j}$ opatřený subdeterminant, který vznikne z matice $\mathbf{A}$ vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.
13b) $\det \mathbf{A} = -30$.

14) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

5 Soustavy lineárních algebraických rovnic

5.1 Příklady

1)
a) Proveďte diskuzi řešení dané soustavy vzhledem k parametru p.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3u & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & + & 2u & = & 7 \\ 3x & - & 2y & + & pz & + & 5u & = & 10 \end{array}.$$

b) Nalezněte všechna řešení soustavy pro p= 0. Řešení $\mathbf{x}$ vyjádřete ve tvaru součtu $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, kde $\mathbf{x}_p$ je partikulární (jedno konkrétní) řešení soustavy s pravou stranou a

$\mathbf{x}_h$ obecné řešení příslušné homogenní soustavy.

2) Určete hodnotu čísla $p \in \mathbf{R}$ tak, aby daná soustava pro neznámé $x,\ y,\ z,\ u$ měla dvouparametrické řešení. Kolik je v tom případě hodnost matice soustavy?

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 2u & = & 1 \\ 2x & + & py & - & 3z & & & = & 2 \\ 3x & + & y & - & 2z & - & 2u & = & 3 \\ 3x & + & 5y & - & 7z & + & pu & = & 3 \end{array}$$

3) Přesvědčte se, že matice $\mathbf{A}$ je regulární. Vyřešte danou soustavu pomocí inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ kde } \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

4)
a) Formulujte Frobeniovu větu.
b) Vyřešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & 4z & + & 2u & = & -1 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & u & = & -2 \\ 2x & - & y & + & 3z & - & u & = & -1 \end{array}$$

5) Určete všechna řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Lze úlohu řešit pomocí Cramerova pravidla? Zdůvodněte.

6)
a) Co se rozumí jednoparametrickým, dvouparametrickým,… řešením soustavy lineárních algebraických rovnic?
b) Pro které hodnoty čísel $p, q \in \mathbf{R}$ má daná soustava pro neznámé $x,\ y,\ z,\ u$ dvouparametrické řešení?

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 3y & + & pz & + & u & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & + & 3u & = & -1 \\ 5x & - & y & - & 4z & + & qu & = & -2 \end{array}$$

7) Je dána soustava

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & pz & = & 4 \\ -x & - & 7y & + & 6z & = & -8 \end{array}$$

a) Pro které hodnoty čísla p má soustava jednoparametrické řešení?
b) Jednotlivé rovnice soustavy můžeme interpretovat jako rovnice rovin. Jak potom lze interpretovat jednoparametrické řešení soustavy?

5.1.1 Výsledky:

1a) Pro $p = 1$ má soustava dvouparametrické řešení, pro $p \neq 1$ má jednoparametrické řešení.
1b) $\mathbf{x} = (4,\ 1,\ 0,\ 0) + t(1,\ 4,\ 0,\ 1)$.

2) $p = 2, \quad h(\mathbf{A}) = 2$.

3) $\mathbf{A}$ je regulární, např. protože det$\mathbf{A} = 4 \neq 0$. Řešení soustavy je

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b},\ \text{kde}\ \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 1 & -7 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^T = (2,\ -9/4,\ -1/4).$$

4a) Soustava $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

4b) $\mathbf{x} = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}, 0, 0\right) + t\left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, 0, 1\right) + s\left(-\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, 1, 0\right), \quad t, s \in \mathbf{R}.$

5) $\mathbf{x} = (1, -1, 1, 0) + \frac{t}{9}(5, -3, 1, 9)$. Cramerovo pravidlo nelze použít, protože det$\mathbf{A}$ neexistuje, neboť matice $\mathbf{A}$ je obdélníková.

6a) k - parametrické řešení SLAR je řešení tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{x_p} + t_1\mathbf{x_1} + t_2\mathbf{x_2} + \cdots + t_k\mathbf{x_k}$, kde $\mathbf{x_p}$ je partikulární řešení soustavy s pravou stranou, nebo nulový vektor pro soustavu homogenní, $t_1,\ t_2, \cdots, t_k$ jsou parametry, k je počet neznámých minus hodnost matice soustavy a $\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \cdots,\ \mathbf{x_k}$ jsou lineárně nezávislá řešení (přidružené) homogenní soustavy, tj. $t_1\mathbf{x_1} + t_2\mathbf{x_2} + \cdots + t_k\mathbf{x_k}$ je obecné řešení (přidružené) homogenní soustavy.
6b) $p = 2,\ q = 5$.

7a) $p = 2$.
7b) Jsou to parametrické rovnice přímky, jež je průsečnicí rovin.

6 Vlastní čísla a vlastní vektory

6.1 Příklady

1) Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$.
a) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$.
b) Jaká jsou vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^5$? Své tvrzení zdůvodněte.

2) Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.
a) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$.
b) Jaká jsou vlastní čísla matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E}$?

3) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ a matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A} + 3\mathbf{E}$.

4)
a) Definujte vlastní čísla a vlastní vektory čtvercové matice.
b) Určete, který ze zadaných vektorů je vlastním vektorem dané matice. Zjistěte odpovídající vlastní číslo.

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

6.1.1 Výsledky:

1a) Vlastní čísla a vlastní vektory jsou: $\lambda_1 = 3,\ \ \mathbf{x}_1 = (2,\ 1),\ \ \lambda_2 = -4,\ \ \mathbf{x}_2 = (1,\ -3)$.
1b) Vlastní vektory matice $\mathbf{B}$ jsou stejné jako vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, vlastní čísla jsou

$\lambda_1(\mathbf{B}) = 3^5,\ \lambda_2(\mathbf{B}) = (-4)^5.$

2a) Charakteristická rovnice je: $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \ \Rightarrow$ vlastní čísla a vlastní vektory jsou: $\lambda_1 = -5,\ \mathbf{x}_1 = k(1,\ -3);\ \lambda_2 = 2,\ \mathbf{x}_2 = k(2,\ 1),\ k \in \mathbf{R}.$

2b) Není třeba počítat matici $\mathbf{B}$ a znovu hledat vlastní čísla a vlastní vektory. Vlastní vektory matice $\mathbf{B}$ jsou stejné jako vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ a vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ jsou dána pomocí vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ analogickým vztahem jako je matice $\mathbf{B}$ vyjádřena pomocí matice $\mathbf{A}$, tj. $\tilde{\lambda} = \lambda^2 + 4\lambda - 2$, tedy $\tilde{\lambda}_1 = 25 - 20 - 2 = 3,\ \tilde{\lambda}_2 = 4 + 8 - 2 = 10.$

3) Vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ jsou:
$\lambda_1 = 1,\ \mathbf{x}_1 = (k,\ -k), \quad \lambda_2 = 4,\ \mathbf{x}_2 = (k,\ 2k), \quad k \in \mathbf{R},$
vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{B}$ jsou:
$\tilde{\lambda}_1 = 1^3 - 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 2,\ \tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 = (k,\ -k), \quad \tilde{\lambda}_2 = 4^3 - 2\cdot 4 + 3\cdot 1 = 59,\ \tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2 = (k,\ 2k).$

4a) Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercové matice $\mathbf{A}$ jsou čísla a vektory, které splňují rovnici $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}.$

4b) Vlastní vektory jsou: $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$, odpovídající vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1.$