$\mathcal{Z}$-TRANSFORMACE

Příklady k procvičení

Obsah

1 $\mathcal{Z}$-transformace

$\mathcal{Z}$-*transformace* zobrazuje posloupnost komplexních čísel $\{f_n\}$ na komplexní funkci komplexní proměnné $F(z)$.

Definice: Máme posloupnost komplexních čísel $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. *Dvoustrannou* $\mathcal{Z}$-*transformací* posloupnosti $\{f_n\}$ nazýváme komplexní funkci komplexní proměnné $F(z)$ definovanou Laurentovou řadou:

$$F(z) \overset{ozn}{=} \mathcal{Z}\left(\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\right) \overset{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} z^n$$

.

Definice: Máme posloupnost komplexních čísel $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Jednostrannou* $\mathcal{Z}$-*transformací* posloupnosti $\{f_n\}$ nazýváme komplexní funkci komplexní proměnné $F(z)$ definovanou:

$$F(z) \overset{ozn}{=} \mathcal{Z}\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n}$$

.

1.1 Příklad

Určete $\mathcal{Z}$-*transformaci* posloupnosti $\{f_n\}_0^{\infty} = (a, 0, 0, \ldots)$, tj. $f_0 = a$; $f_n = 0$ pro $\forall n \in N$.

Řešení $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} = \frac{f_0}{z^0} + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \ldots = \frac{a}{1} + \frac{0}{z} + \frac{0}{z^2} + \ldots = a.$

1.2 Příklad

Určete $\mathcal{Z}$-*transformaci* posloupnosti $\{f_n\}_0^{\infty} = (a, a, a, \ldots)$, tj. $f_n = a$ pro $\forall n \in N_0$.

Řešení $F(z) = \frac{a}{z^0} + \frac{a}{z^1} + \frac{a}{z^2} + \ldots = \left[\begin{array}{l}\text{geometrická řada}\\ \text{s kvocientem } q = \frac{1}{z}\end{array}\right] = \frac{a}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{az}{z-1}$ pro $|z| > 1$.

1.3 Příklad

Určete $\mathcal{Z}$-*transformaci* posloupnosti $\{f_n\}_0^{\infty}$; $f_n = \mathrm{e}^{\sigma n}$; $n \in N_0$; $\sigma \in C$.

Řešení $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sigma n}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\sigma}}{z}\right)^n = \left[\begin{array}{l}\text{geometrická řada}\\ \text{s kvocientem } q = \frac{\mathrm{e}^{\sigma}}{z}\end{array}\right] = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{e}^{\sigma}}{z}} = \frac{z}{z - \mathrm{e}^{\sigma}};$

kde $\left|\frac{\mathrm{e}^{\sigma}}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |\mathrm{e}^{\sigma}|$.

2 Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

2.1 Linearita

Nechť $\mathcal{Z}\left(\{f_n\}_0^\infty\right) = F(z);\ \mathcal{Z}\left(\{g_n\}_0^\infty\right) = G(z)$.

Potom $\mathcal{Z}\left(\{\alpha f_n + \beta g_n\}_0^\infty\right) = \alpha\mathcal{Z}\left(\{f_n\}_0^\infty\right) + \beta\mathcal{Z}\left(\{g_n\}_0^\infty\right) = \alpha F(z) + \beta G(z)$.

2.1.1 Příklad

Určete *$\mathcal{Z}$-transformaci* posloupnosti $\{f_n\}_0^\infty;\ f_n = \cos cn,\ c \in C$.

Řešení Platí $\dfrac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} = \cos x \quad\Rightarrow\quad \cos cn = \dfrac{\mathrm{e}^{icn} + \mathrm{e}^{-icn}}{2}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left(\{\mathrm{e}^{icn}\}_0^\infty\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{icn}}{z^n} = \left[\begin{array}{l} \text{geometrická řada} \\ \text{s kvocientem } q = \dfrac{\mathrm{e}^{ic}}{z} \end{array}\right] = \frac{1}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^{ic}}{z}} = \frac{z}{z - \mathrm{e}^{ic}},\quad |z| > |\mathrm{e}^{ic}|, \\
\mathcal{Z}\left(\{\mathrm{e}^{-icn}\}_0^\infty\right) &= \frac{z}{z - \mathrm{e}^{-ic}},\quad |z| > |\mathrm{e}^{-ic}|, \\
\mathcal{Z}\left(\{\cos cn\}_0^\infty\right) &= \frac{\dfrac{z}{z - \mathrm{e}^{ic}} + \dfrac{z}{z - \mathrm{e}^{-ic}}}{2} = \frac{z(z - \mathrm{e}^{-ic} + z - \mathrm{e}^{ic})}{2(z - \mathrm{e}^{ic}) \cdot (z - \mathrm{e}^{-ic})} = \frac{z(z - \cos c)}{z^2 - 2z\cos c + 1}, \\
|z| &> \max\{|\mathrm{e}^{ic}|,\ |\mathrm{e}^{-ic}|\}.
\end{aligned}
$$

2.2 Podobnost obrazu

Nechť $\mathcal{Z}\left(\{f_n\}_{n=0}^\infty\right) = F(z)$. Pak $\quad \mathcal{Z}\left(\{a^n f_n\}_{n=0}^\infty\right) = F\left(\dfrac{z}{a}\right),\ a \in C;\ a \neq 0$.

Tlumení: $a = \mathrm{e}^\alpha$

$$\mathcal{Z}\left(\{\mathrm{e}^{\alpha n} f_n\}_{n=0}^\infty\right) = F(z\mathrm{e}^{-\alpha})\ .$$

3 Konvoluce předmětů

$$\mathcal{Z}\left(\{(f*g)_n\}_{n=0}^\infty\right) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}\right\}_{n=0}^\infty\right) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{i=0}^{n} f_{n-i} g_i\right\}_{n=0}^\infty\right) = F(z)\cdot G(z),$$

kde $F(z)$ a $G(z)$ jsou obrazy posloupností $\{f_n\}_{n=0}^\infty,\ \{g_n\}_{n=0}^\infty$.

3.1 Příklad

Určete *$\mathcal{Z}$-transformaci* $\{f_n\}_{n=0}^\infty;\ f_n = 1 + \mathrm{e}^c + \ldots + \mathrm{e}^{nc},\ n \in N_0;\ c \in C$.

Řešení Zvolíme $\{a_n\}_{n=0}^\infty = \{\mathrm{e}^{nc}\}_{n=0}^\infty;\ \{b_n\}_{n=0}^\infty = 1$.

$$
\begin{aligned}
\{(a*b)_n\}_{n=0}^\infty &= \{f_n\}_{n=0}^\infty \\
\mathcal{Z}\left(\{f_n\}_{n=0}^\infty\right) = \mathcal{Z}\left(\{a_n\}\right)\cdot\mathcal{Z}\left(\{b_n\}\right) &= \frac{1}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^c}{z}} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{z}} = \frac{z^2}{(z - \mathrm{e}^c)(z - 1)} \\
|z| &> \max\{|\mathrm{e}^c|, 1\}.
\end{aligned}
$$

4 Posloupnost $\{f_n\}_0^\infty$ posunutá o k vpravo

Je-li posloupnost:

$$\begin{aligned} \{f_{n-k}\}_{n=0}^\infty &= \{0, 0, \ldots, 0, f_0, f_1, \ldots\} \\ n &= \{0, 1, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots\} \end{aligned}$$

(tj. prvních k členů posloupnosti je nulových)
Platí: $\mathcal{Z}\left(\{f_{n-k}\}_{n=0}^\infty\right) = z^{-k}F(z)$, kde $F(z)$ je obraz $\{f_n\}_{n=0}^\infty$.

4.1 <u>Příklad</u>

Nalezněte $\mathcal{Z}$*-transformaci* posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^\infty$, kde $f_n = 0$ pro $n = 0, 1, \ldots, k-1$; $f_n = \mathrm{e}^{c(n-k)}$ pro $n \geq k,\ n \in N$.

<u>*Řešení*</u> Posloupnost $\{f_n\}$ dostaneme posunutím posloupnosti $\{g_n\},\ g_n = \mathrm{e}^{cn};\ n \in N$ o k vpravo.

$\mathcal{Z}\left(\{g_n\}_{n=0}^\infty\right) = \dfrac{z}{z - \mathrm{e}^c} = G(z);\ |z| > \mathrm{e}^c \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\left(\{f_n\}_{n=0}^\infty\right) = \mathcal{Z}\left(\{g_{n-k}\}_{n=0}^\infty\right) = \dfrac{1}{z^k} \cdot \dfrac{z}{z - \mathrm{e}^c};$
$|z| > \mathrm{e}^c.$

Nebo přímým výpočtem:

$$\mathcal{Z}\left(\{f_n\}_{n=0}^\infty\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f_n}{z^n} = \left[\begin{array}{l}\text{prvních } k \text{ členů} \\ \text{je rovno nule}\end{array}\right] = \sum_{n=k}^\infty \frac{\mathrm{e}^{c(n-k)}}{z^n} = \left[\begin{array}{l} l = n - k \\ n = l + k \end{array}\right] = \sum_{l=0}^\infty \frac{\mathrm{e}^{cl}}{z^l \cdot z^k} =$$
$$\frac{1}{z^k} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^c}{z}} = \frac{z}{z^k(z - \mathrm{e}^c)};\ |z| > \mathrm{e}^c.$$

5 Posloupnost $\{f_n\}_0^\infty$ posunutá o k vlevo

Je posloupnost $\{f_{n+k}\}_{n=0}^\infty = \{f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots\}$

Platí: $\mathcal{Z}\left(\{f_{n+k}\}_{n=0}^\infty\right) = z^k \left[F(z) - \displaystyle\sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_n}{z^n}\right]$

5.1 <u>Příklad</u>

Nalezněte obraz $\{f_n\}_{n=0}^\infty;\ f_n = \mathrm{e}^{c(n+k)},\ n \in N_0$

<u>*Řešení*</u> Posloupnost $\{f_n\}_0^\infty$ dostaneme posunutím posloupnosti $\{g_n\}_0^\infty$; $g_n = \mathrm{e}^{cn}$; o k vlevo.

$$\mathcal{Z}\left(\{f_n\}_{n=0}^\infty\right) = \mathcal{Z}\left(\{g_{n+k}\}_{n=0}^\infty\right) = z^k \left[G(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\mathrm{e}^{cn}}{z^n}\right] = z^k \left[\frac{z}{z - \mathrm{e}^c} - \frac{1 - \left(\dfrac{\mathrm{e}^c}{z}\right)^k}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^c}{z}}\right] =$$

$$\frac{z^{k+1}}{z - \mathrm{e}^c} - \frac{z^k - \mathrm{e}^{kc}}{z - \mathrm{e}^c} \cdot z = \frac{z\mathrm{e}^{kc}}{z - \mathrm{e}^c}$$

Nebo přímý výpočet:

$$\mathcal{Z}\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{c(n+k)}}{z^n} = e^{ck} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{cn}}{z^n} = e^{ck} \cdot \frac{z}{z - e^c};\ |z| > |e^c|.$$

5.2 Neřešené příklady

Určete $\mathcal{Z}$ obrazy následujících posloupností.

1) $f_n = (-2)^n$ $\left[F(z) = \frac{z}{z+2}\right]$

2) $f_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ $\left[F(z) = \frac{3z}{3z+1}\right]$

3) $f_n = (2e^a)^n$ $\left[F(z) = \frac{z}{z-2e^a}\right]$

4) $f_o = 0,\ f_n = (-2)^n,$ pro $n \geq 1$ $\left[F(z) = -\frac{2}{z+2}\right]$

5) $f_o = f_1 = 0,\ f_n = (-2)^n,$ pro $n \geq 2$ $\left[F(z) = \frac{4}{z(z+2)}\right]$

6 Dopředné a zpětné diference

Dopředná diference posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost

$$\{\Delta f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_{n+1} - f_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Dopředná diference k-tého řádu je posloupnost

$$\{\Delta^k f_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\Delta(\Delta^{k-1} f_n)\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

6.1 Příklad

Určete dopřednou diferenci I. a III. řádu pro posloupnost
$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, -1, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$.

Řešení

$$\begin{aligned}
\{\Delta f_n\}_{n=0}^{\infty} &= \{1, 0, -2, 2, -1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\} \\
\{\Delta^2 f_n\}_{n=0}^{\infty} &= \{-1, -2, 4, -3, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\} \\
\{\Delta^3 f_n\}_{n=0}^{\infty} &= \{-1, 6, -7, 4, -1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}
\end{aligned}$$

Zpětná diference posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost

$$\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n - f_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}.$$

Zpětná diference k-tého řádu je posloupnost

$$\{\nabla^k f_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\nabla(\nabla^{k-1} f_n)\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

6.2 <u>Příklad</u>

Určete zpětnou diferenci I. a III. řádu pro posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, -1, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$.

<u>Řešení</u>

$$
\begin{aligned}
\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty} &= \{0, 1, 0, -2, 2, -1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\} \\
\{\nabla^2 f_n\}_{n=0}^{\infty} &= \{0, 1, -1, -2, 4, -3, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\} \\
\{\nabla^3 f_n\}_{n=0}^{\infty} &= \{0, 1, -2, -1, 6, -7, 4, -1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}
\end{aligned}
$$

7 Řešení lineárních diferenčních rovnic $\mathcal{Z}$ transformací

<u>Postup</u>: Máme lineární diferenční rovnici pro neznámou posloupnost $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. $\mathcal{Z}$ transformaci $\{y_n\}$ označíme $Y(z)$. Provedeme $\mathcal{Z}$ transformaci dané rovnice a podobně jako u Laplaceovy transformace získáme algebraickou rovnici pro funkci $Y(z)$. Rovnici vyřešíme a zpětnou transformací zjistíme (obvykle s použitím patřičné tabulky) $\{y_n\}$.

7.1 <u>Příklad</u>

Určete partikulární řešení dané rovnice vyhovující zadaným počátečním podmínkám.

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 y_n - y_n &= 1, \quad n \in \mathbf{N_o} \\
\text{počáteční podmínky: } y_o &= 0, \quad \Delta y_o = 1
\end{aligned}
$$

Ukážeme si dva způsoby řešení

1. způsob: Obraz posloupnosti $\{y_n\}$ označíme $Y(z)$, v tabulce najdeme obraz 2. diference a obraz pravé strany rovnice.

$$\Delta y_n \to (z-1)^2\, Y(z) - z, \quad 1 \to \frac{z}{z-1}.$$

Dosadíme do zadané rovnice

$$
\begin{aligned}
(z-1)^2\, Y(z) - z - Y(z) &= \frac{z}{z-1} \quad \text{a postupně vypočítáme } Y(z) \\
Y(z)((z-1)^2 - 1) &= \frac{z + z^2 - z}{z-1} \\
Y(z) &= \frac{z^2}{z\,(z-1)(z-2)} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}
\end{aligned}
$$

Abychom mohli najít v tabulce zpětnou transformaci $Y(z) \to \{y_n\}$, musíme výsledný zlomek rozložit na parciální zlomky (z je dobré vytknout).

$$z\frac{1}{(z-1)(z-2)} = z\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right) \text{ a z tabulky } \frac{z}{z-2} \to 2^n, \quad \frac{z}{z-1} \to 1.$$

$\Rightarrow y_n = 2^n - 1,\ \ y_o = 0,\ \ y_1 = 1$

Řešení původní rovnice, vyhovující daným počátečním podmínkám, je $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty}$.

2. způsob:

Vyjádříme $\Delta^2 y_n = \Delta(y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$ a dosadíme do rovnice. Dostaneme:

$y_{n+2} - 2y_{n+1} = 1, \quad$ počáteční podmínky $y_o = 0,\ \ y_1 = 1.$

Rovnici můžeme chápat jako rekurentní vztah pro hledanou posloupnost. Je

$y_1 = 1 + 2y_o = 1$

$y_2 = 1 + 2y_1 = 1 + 2$

$y_3 = 1 + 2y_2 = 1 + 2 + 2^2$

$\vdots$

$y_n = 1+2y_{n-1} = 1+2+2^2+\ldots+2^{n-1} = \lceil$součet prvních n členů geometrické posloupnosti$\rfloor =$

$= \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1.$