

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je integrální transformace definovaná vztahem:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad \text{kde funkce } \begin{cases} f(t) : \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R} \text{ je předmět,} \\ F(p); p \in \mathbf{C} \text{ je obraz.} \end{cases}$$

Značení

$$\begin{array}{l} F(p) = \mathcal{L} \{f(t)\} \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\} \end{array} \quad \text{stručně} \quad \begin{array}{l} F(p) \triangleq f(t) \\ f(t) \triangleq F(p) \end{array}$$

Vlastnosti

Přímá i zpětná Laplaceova transformace jsou lineární:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{af(t) + bg(t)\} &= a\mathcal{L} \{f(t)\} + b\mathcal{L} \{g(t)\} \\ \mathcal{L}^{-1} \{aF(p) + bG(p)\} &= a\mathcal{L}^{-1} \{F(p)\} + b\mathcal{L}^{-1} \{G(p)\} \end{aligned}$$

Základní vztahy \mathcal{L} -transformace

Předmět	Obraz
$f(t)$	$F(p)$
$f(t) e^{at}$	$F(p - a)$ posunutí v obrazu
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$ změna měřítka
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$tf(t)$	$-F'(p)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_p^{\infty} F(q) dq$
$\int_0^t f(z) dz$	$\frac{1}{p} F(p)$

Konvoluce funkcí $f(t)$, $g(t)$:

$$(f * g)(t) = (g * f)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(p) \cdot G(p), \text{ kde } F(p) \triangleq \mathcal{L}\{f(t)\}, G(p) \triangleq \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Tabulka obrazů pro dané předměty

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
1	$\frac{1}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\sinh t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$	$\cosh t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
te^{at}	$\frac{1}{(p - a)^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t^2 e^{at}$	$\frac{2}{(p - a)^3}$	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p - a}{(p - a)^2 + \omega^2}$

Příklady: Pro daný předmět $f(t)$ určete obraz $F(p)$.

$$1. f(t) = 1 + 4te^{-t} + 5t^2e^{2t} \quad \left[F(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{(p+1)^2} + \frac{5 \cdot 2}{(p-2)^3} \right]$$

$$2. f(t) = 2 \cos 3t - 3 \sin 2t \quad \left[F(p) = 2 \frac{p}{p^2 + 9} - 3 \cdot \frac{2}{p^2 + 4} \right]$$

$$3. f(t) = t^3 - 4 \sin 3t + te^{-2t} \quad \left[F(p) = \frac{3!}{p^4} - \frac{4 \cdot 3}{p^2 + 9} + \frac{1}{(p+2)^2} \right]$$

$$4. f(t) = 5e^t + e^{-4t} - 3 \sin 3t \quad \left[F(p) = 5 \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+4} - 3 \cdot \frac{3}{p^2 + 9} \right]$$

$$5. f(t) = t(\sin 3t - \cos 3t) \quad \left[F(p) = \frac{6p}{(p^2 + 9)^2} - \frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2} \right]$$

6. $f(t) = (t^2 + 2t - 3)e^{-2t}$ $\left[F(p) = \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{2}{(p+2)^2} - \frac{3}{p+2} \right]$
7. $f(t) = (t+2)\sin 4t$ $\left[F(p) = \frac{2p \cdot 4}{(p^2+16)^2} + \frac{8}{p^2+16} \right]$
8. $f(t) = 3e^{-2t}\sin 7t$ $\left[F(p) = 3 \cdot \frac{7}{(p+2)^2+49} \right]$
9. $f(t) = e^{-2t}(2\cos 3t - \sin 3t)$ $\left[F(p) = 2 \cdot \frac{p+2}{(p+2)^2+9} - \frac{3}{(p+2)^2+9} \right]$
10. $f(t) = 3\sin 3t \cdot \cos t$ $\left[F(p) = \frac{6}{p^2+16} + \frac{3}{p^2+4} \right]^1$

Zpětná Laplaceova transformace

Předpokládáme, že obraz $F(p)$ je ryze lomená racionální funkce a hledáme předmět $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$.

Postup Funkci $F(p)$ rozložíme na parciální zlomky typu:

$$\frac{A}{(p-a)^n}, n \in \mathbb{N}; \quad \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2}; \quad \frac{Ap+B}{(p-a)^2+\omega^2}; \quad \frac{Ap+B}{(p^2+\omega^2)^2}; \quad \frac{Ap+B}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$$

a k jednotlivým zlomkům najdeme předměty za pomoci níže uvedené tabulky.

Příklady: S použitím tabulky určete předmět $f(t)$ k danému obrazu $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{2p-3}{p^2+3p+2}$

Řešení: $F(p)$ rozložíme na parciální zlomky.

$$F(p) = \frac{2p-3}{(p+2)(p+1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+1}$$

$\Rightarrow 2p-3 = A(p+1) + B(p+2)$. Dosadíme nulové body jmenovatele

$$p = -2: \quad -7 = -A \Rightarrow A = 7$$

$$p = -1: \quad -5 = B$$

$$F(p) = \frac{7}{p+2} - \frac{5}{p+1} \text{ a podle tabulky je } f(t) = 7e^{-2t} - 5e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

2. $F(p) = \frac{p^2+1}{p^3-p^2-6p}$ $\left[f(t) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right]$

3. $F(p) = \frac{9-3p}{p^3+9p}$ $[f(t) = 1 - \cos 3t - \sin 3t]$

4. $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$ $\left[f(t) = \frac{1}{9}e^t(3t-1) + \frac{1}{9}e^{-2t} \right]$

¹ v příkladu použijte vztah: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

Tabulka předmětů k daným obrazům

$a \in \mathbf{R}, b > 0, \omega > 0.$

$F(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(p-a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}$
$\frac{1}{(p-a)^n}, n \in \mathbf{N}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
$\frac{1}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{1}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$
$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$
$\frac{1}{((p-a)^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} e^{at} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
$\frac{p}{((p-a)^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} e^{at} (\omega^2 t \sin \omega t + a \sin \omega t - a\omega t \cos \omega t)$

Lineární diferenciální rovnice řešené Laplaceovou transformací

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je možné řešit Laplaceovou transformací, která danou diferenciální rovnici pro neznámou funkci $y(t)$ převádí na lineární algebraickou rovnici pro obraz $y(t)$. Ukážeme si to na příkladech.

Příklad 1 Na intervalu $(0, \infty)$ nalezněte řešení dané diferenciální rovnice vyhovující zadané počáteční podmínce.

$$y' + 4y = \sin 2t; \quad y(0^+) = 3.$$

Řešení

Obraz řešení označíme $Y(p) \triangleq y(t)$, obraz derivace $y'(t) \triangleq pY(p) - y(0^+) = pY(p) - 3$ a

$\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2 + 4}$. Obraz zadané rovnice je pak:

$$\begin{aligned} pY(p) - 3 + 4Y(p) &= \frac{2}{p^2 + 4}, \quad \text{vypočteme } Y(p) \\ (p + 4) \cdot Y(p) &= \frac{2}{p^2 + 4} + 3 \\ Y(p) &= \frac{2}{(p^2 + 4)(p + 4)} + \frac{3}{p + 4} \end{aligned}$$

Pro zpětnou transformaci rozložíme první zlomek na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(p^2 + 4)(p + 4)} &= \frac{A}{p + 4} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4} \\ \text{vyjde} \quad \frac{2}{(p^2 + 4)(p + 4)} &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{p + 4} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{2}{5(p^2 + 4)} \\ \text{takže} \quad Y(p) &= \frac{31}{10(p + 4)} - \frac{p}{10(p^2 + 4)} + \frac{2}{5(p^2 + 4)} \end{aligned}$$

a hledané řešení (předmět k vypočtenému obrazu) je:

$$y(t) = \frac{31}{10}e^{-4t} - \frac{1}{10} \cos 2t + \frac{1}{5} \sin 2t .$$

Příklad 2 Vyřešte rovnici:

$$y'' + 2y' + 2y = 0; \quad y(0^+) = 1, \quad y'(0^+) = 2$$

Řešení

Zopakujeme postup z předchozího příkladu.

Označíme $Y(p) \triangleq y(t)$,

obraz I. derivace $y'(t) \triangleq pY(p) - 1$,

obraz II. derivace $y''(t) \triangleq p^2Y(p) - p - 2$ a obraz zadané rovnice je:

$$\begin{aligned} p^2Y(p) - p - 2 + 2(pY(p) - 1) + 2Y(p) &= 0 \\ (p^2 + 2p + 2)Y(p) &= p + 4 \\ \text{z toho } Y(p) &= \frac{p + 4}{p^2 + 2p + 2}. \end{aligned}$$

Upravíme

$$Y(p) = \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 1} + \frac{3}{(p + 1)^2 + 1}$$

a k vypočítanému obrazu najdeme předmět, tj. řešení zadané rovnice

$$y(t) = (\cos t + 3 \sin t)e^{-t} .$$

Příklad 3a) Vyřešte rovnici:

$$y'' + 9y = 3 \cos 3t; \quad y(0^+) = 0, \quad y'(0^+) = 3$$

Řešení

Provedeme Laplaceovu transformaci

$$\begin{aligned} Y(p) &\triangleq y(t) \\ y''(t) &\triangleq p^2 Y(p) - 0 - 3 \\ p^2 Y(p) - 3 + 9Y(p) &= 3 \cdot \frac{p}{p^2 + 9} \quad \text{z toho} \end{aligned}$$

$$Y(p) = \frac{3p}{(p^2 + 9)^2} + \frac{3}{p^2 + 9} \quad \text{a zpětnou transformací}$$

$$\text{získáme hledané řešení } y(t) = \left(1 + \frac{t}{2}\right) \sin 3t$$

Příklad 3b) (Jiný způsob řešení.)

Pro porovnání vyřešíme rovnici z příkladu 3a) metodou neurčitých koeficientů.

Řešení

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$

\Rightarrow obecné řešení příslušné homogenní rovnice je

$$y_p(t) = a \cos 3t + b \sin 3t, \quad \text{kde } a, b \in \mathbf{R}.$$

Partikulární řešení rovnice s pravou stranou předpokládáme ve tvaru:

$$y_p(t) = ct \cos 3t + dt \sin 3t$$

koeficienty c, d spočítáme dosazením y_p a y_p'' do původní rovnice $y'' + 9y = 3 \cos 3t$ a porovnáním koeficientů u lineárně nezávislých funkcí $\cos 3t, \sin 3t$.

$$y_p''(t) = -6c \sin 3t - 9ct \cos 3t + 6d \cos 3t - 9dt \sin 3t,$$

Dosadíme:

$$-6c \sin 3t - 9ct \cos 3t + 6d \cos 3t - 9dt \sin 3t + 9ct \cos 3t + 9dt \sin 3t = 3 \cos 3t,$$

upravíme

$$-6c \sin 3t + 6d \cos 3t = 3 \cos 3t$$

a porovnáme koeficienty u $\cos 3t, \sin 3t$. Získáme hodnoty c, d .

$$\left. \begin{array}{l} \cos 3t : \quad 6d = 3 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{2} \\ \sin 3t : \quad -6c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_p = \frac{t}{2} \sin 3t.$$

Obecné řešení zadané rovnice je pak

$$y(t) = a \cos 3t + \left(b + \frac{t}{2}\right) \sin 3t.$$

Hodnoty a, b dostaneme z počátečních podmínek

$$\begin{aligned} y(0^+) = 0 &\Rightarrow a = 0 \\ y'(0^+) = 3 &\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \sin 3t + \left(b + \frac{1}{2}t\right) 3 \cos 3t \right]_{t=0} = 3 \\ \Rightarrow 3b = 3 &\Rightarrow b = 1. \end{aligned}$$

A máme řešení zadané rovnice vyhovující daným počátečním podmínkám:

$$y = \left(1 + \frac{t}{2}\right) \sin 3t .$$

Neřešené příklady

Vyřešte diferenciální rovnice s uvedenými počátečními podmínkami.

1. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$ $[y(t) = (\cos t - 2 \sin t) e^t]$

2. $y'' + 2y' = 1 + 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$ $\left[y(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1 + t^2)\right]$

3. $y'' - y' - 6y = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ $\left[y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{3t}\right]$

4. $y'' - y' - 2y = 2t - 3, \quad y(0) = \frac{15}{4}, \quad y'(0) = \frac{13}{4}$ $\left[y(t) = 2e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-t} - t + 2\right]$

5. $y'' - 9y = 26e^{2t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$ $[y(t) = e^{-3t} - e^{3t} + 2e^{2t}]$