1) Spočtěte $\displaystyle\int \left(\frac{5}{(3x-2)^4} - 2\sin(5x-\pi)\right) \mathrm{d}x$ a určete intervaly, na kterých integrál existuje.

$$\int \left(\frac{5}{(3x-2)^4} - 2\sin(5x-\pi)\right) \mathrm{d}x = -\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{(3x-2)^3} + \frac{2}{5}\cos(5x-\pi) + C$$

Intervaly: $3x-2 \neq 0 \;\Rightarrow\; (-\infty, 2/3),\ (2/3, \infty)$.

2) Určete intervaly, na kterých integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$ existuje a metodou substituce jej vypočítejte.

Intervaly: $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^x > 1 \;\Rightarrow\; (0,\ \infty)$.

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = \mathrm{e}^x - 1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{1/2}}{1/2} = \lceil \text{zpětná substituce} \rfloor = 2\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C.$$

3) Určete obsah plochy, ohraničené zleva hyperbolou $y = \dfrac{1}{x}$, zprava parabolou $y = x^2$ a shora přímkou $y = 4$.

Průsečík hyperboly a paraboly je dán rovnicí: $\dfrac{1}{x} = x^2 \;\Rightarrow\; x = 1 \;\Rightarrow\; P[1,\ 1]$.

$$S = \int_1^4 \mathrm{d}y \int_{1/y}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x = \int_1^4 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \left.\frac{y^{3/2}}{3/2} - \ln y\right|_1^4 = \frac{14}{3} - \ln 4$$

4) Vypočítejte $\displaystyle\int_2^6 \frac{4}{\sqrt[3]{4-2x}}\,\mathrm{d}x$. $\displaystyle\int_2^6 \frac{4}{\sqrt[3]{4-2x}}\,\mathrm{d}x = 4\left.\frac{(4-2x)^{2/3}}{(-2)\cdot 2/3}\right|_2^6 = -12.$

5) Metodou variace konstanty vyřešte lineární diferenciální rovnici (nalezněte obecné řešení) $y' - 2y\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. (Nápověda: $b\ln a = \ln(a^b)$.)

Řešení y_h příslušné homogenní rovnice: $y' - 2y\dfrac{\sin x}{\cos x} = 0$. Rovnice je separovatelná

$y' = 2y\dfrac{\sin x}{\cos x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y\dfrac{\sin x}{\cos x}$. Odseparujeme proměnné $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow$

$\ln y = -2\ln(\cos x) + C \;\Rightarrow\; y_h = \dfrac{C}{\cos^2 x}$.

Řešení y_p rovnice s pravou stranou předpokládáme ve tvaru $y_p = \dfrac{C(x)}{\cos^2 x}$ a dosadíme do původní rovnice s pravou stranou $\dfrac{C'(x)}{\cos^2 x} - 2\,\dfrac{C(x)}{\cos^3 x}(-\sin x) - 2\,\dfrac{C(x)}{\cos^2 x}\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Po úpravě $C'(x) = 1 \;\Rightarrow\; C(x) = x$. Obecné řešení je tedy $y = y_h + y_p = \dfrac{C+x}{\cos^2 x}$.

6) S použitím transformace do polárních souřadnic vypočítejte $\displaystyle\iint_\Omega \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je osmina mezikruží $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ležící ve 2. kvadrantu mezi osou y a přímkou $y = -x$.

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 \frac{r\sin\varphi}{r^2}\,r\,\mathrm{d}r = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin\varphi \cdot r|_1^2\,\mathrm{d}\varphi = -\cos\varphi|_{\pi/2}^{3\pi/4} = \sqrt{2}/2.$$

7) Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte diferenciální rovnici
$y'' + y' - 6y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 3,\ y'(0) = -4$.

Laplaceův obraz rovnice je: $p^2\,Y(p) - p\cdot 3 + 4 + pY(p) - 3 - 6Y(p) = 0$, z toho
$Y(p) = \dfrac{3p-1}{(p-2)(p+3)} = \lceil$ rozklad na parciální zlomky$\rfloor = \dfrac{A}{p-2} + \dfrac{B}{p+3} \;\Rightarrow$
$3p - 1 = A\,(p+3) + B\,(p-2)$, dosazením nulových bodů:
$p = 2 \;\Rightarrow\; 5 = 5\,A \;\Rightarrow\; A = 1,$
$p = -3 \;\Rightarrow\; -10 = -5\,B \;\Rightarrow\; B = 2.$

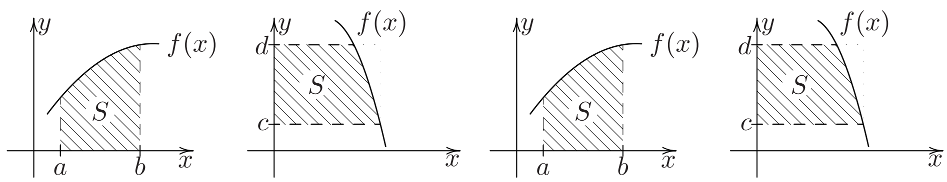
Řešení vyhovující daným počátečním podmínkám je $y = \mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{-3x}$.

8) Vyřešte diferenční rovnici $y_{n+1} - 2y_n = 4^n,\; n \in \mathbf{N}_o$ s počáteční podmínkou $y_o = 0$.
Označíme $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, potom obraz $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = zY(z) - y_o z = zY(z)$,
obraz $\mathcal{Z}\{4^n\} = \dfrac{z}{z-4} \;\Rightarrow$ obraz rovnice je $(z-2)Y(z) = \dfrac{z}{z-4} \;\Rightarrow$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-4)(z-2)} = z\,\frac{1}{(z-4)(z-2)} = z\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-2} \;\Rightarrow$$

Řešením dané rovnice je posloupnost $y_n = \dfrac{1}{2}(4^n - 2^n)$, pro $n = 0, 1, 2, \ldots$

9)I) Objem rotačního tělesa je $V = \pi\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$. Těleso vznikne rotací rovinného útvaru S



a) kolem osy y b) kolem osy y c) kolem osy x d) kolem osy x

II) Je-li $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, pak $\displaystyle\int f(bx+a)\mathrm{d}x =$

a) $F(ax+b) + C$ b) $\dfrac{1}{b}F(bx+a) + C$ c) $\dfrac{1}{b}F(ax+b) + C$ d) $a\,F(bx+a) + C$

III) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x =$

a) $\arcsin(2x+1)$, b) $\arctan(2x+1)$, c) $\dfrac{1}{2}\arctan(2x+1)$, d) $2\arctan(2x+1)$.

IV) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ se vypočítá substitucí $t = f(x)$. Výsledek je

a) $\log x$, b) $\ln|f(x)|$, c) $\dfrac{f^{-2}(x)}{-2}$, d) $\ln|x|$.

V) Množina $\Omega = \{[x,y];\; (x-1)^2 \le y \le 1-x\}$ je dána zápisem

a) $x \in \langle -1,\, 1\rangle$, $y \in \langle x-1,\, (x-1)^2\rangle$,
b) $x \in \langle 1,\, 2\rangle$, $y \in \langle (x-1)^2,\, 1-x\rangle$,
c) $x \in \langle 0,\, 1\rangle$, $y \in \langle 1-x,\, (x-1)^2\rangle$,
d) $x \in \langle 0,\, 1\rangle$, $y \in \langle (x-1)^2,\, 1-x\rangle$,

10)I) Množina $\Omega = \{[x,y];\; y \le -\sqrt{3}x \;\wedge\; y \ge 0 \;\wedge\; x^2 + y^2 \le 4\}$ je dána zápisem v polárních souřadnicích
(Nápověda: $-\sqrt{3} = \tan\dfrac{2\pi}{3}$)

a) $r \in \langle 0,\, 2\rangle$, $\varphi \in \langle \dfrac{\pi}{2},\, \dfrac{2}{3}\pi\rangle$,
b) $r \in \langle 0,\, 4\rangle$, $\varphi \in \langle \dfrac{\pi}{3},\, \dfrac{\pi}{2}\rangle$,
c) $r \in \langle 0,\, 2\rangle$, $\varphi \in \langle \dfrac{2\pi}{3},\, \pi\rangle$,
d) $r \in \langle -2,\, 0\rangle$, $\varphi \in \langle \dfrac{2\pi}{3},\, \pi\rangle$,

II) Rovnice $y' = \dfrac{x^2(y-1)}{x+1}$ je
a) lineární i separovatelná, b) pouze lineární,
c) pouze separovatelná d) ani lineární ani separovatelná.

III) Obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ má tvar
a) $C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$, b) $C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}$, c) $C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-x}$, d) $C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}$.

IV) Obraz funkce $f(t) = t^2$ v Laplaceově transformaci je podle definice
a) $\int\limits_0^2 t^2\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}p$ b) $\int\limits_0^\infty t^{(2-p)}\, \mathrm{d}t$ c) $\int\limits_2^\infty t^{2-pt}\, \mathrm{d}t$ d) $\int\limits_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$.

V) Je dána posloupnost $f_n = 4^n,\ n \in \mathbf{N}_o$. Obraz posloupnosti f_n posunuté o dvě doprava je
a) $\dfrac{4z}{z-4}$ b) $\dfrac{z^2}{z-4}$ c) $\dfrac{1}{z(z-4)}$ d) $\dfrac{4}{z(z-4)}$

9) c), b), c), b), d)
10) c), a), b), d), c).