1) Vypočítejte $\int \left(4\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{(5x-2)^3}\right) \mathrm{d}x$ a určete intervaly, na kterých integrál existuje.

$$\int \left(4\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{(5x-2)^3}\right) \mathrm{d}x = \frac{4\mathrm{e}^{3x}}{3} + \frac{-3}{10} \cdot \frac{1}{(5x-2)^2} + C.$$

Intervaly: $5x - 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; (-\infty, 2/5),\ (2/5, \infty)$.

2) Určete intervaly, na kterých integrál $\int \ln x \,\mathrm{d}x$ existuje a metodou per partes jej vypočítejte.
Návod: integrovanou funkci chápejte jako součin $1 \cdot \ln x$

Intervaly: $(0,\ \infty)$

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \dfrac{1}{x} \end{bmatrix} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \mathrm{d}x = x \ln x - x + C.$$

3) Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací kolem osy x rovinného útvaru ohraničeného osou x, funkcí $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+3}}$ a přímkami $x = 1,\ x = \sqrt{6}$.

$$V = \pi \int_1^{\sqrt{6}} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t^2 = x^2 + 3 \\ 2t\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \\ t \in \langle 2,\ 3 \rangle \end{bmatrix} = \pi \int_2^3 \frac{t\mathrm{d}t}{t} = \pi\, t|_2^3 = \pi$$

4) Vypočítejte $\displaystyle\int_{1/4}^{2/7} \frac{7}{\sqrt{2-7x}} \,\mathrm{d}x$. $\displaystyle\int_{1/4}^{2/7} \frac{7}{\sqrt{2-7x}} \,\mathrm{d}x = -\frac{7}{7} \frac{\sqrt{2-7x}}{1/2}\Big|_{1/4}^{2/7} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 1.$

5) Metodou separace proměnných vyřešte diferenciální rovnici $y' = \frac{\cos x}{2y \sin^2 x}$ s počáteční podmínkou $y(\pi/2) = 1$.

Odseparujeme proměnné: $\displaystyle\int 2y\mathrm{d}y = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; 2 \cdot \frac{y^2}{2} = \frac{-1}{\sin x} + C \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{C - \frac{1}{\sin x}}$

Počáteční podmínka: $y(\pi/2) = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{C-1} = 1 \;\Rightarrow\; C = 2.$

Hledané řešení je $y = \sqrt{2 - \frac{1}{\sin x}}$.

6) S použitím transformace $x = 2 + r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, Jakobián $J = r$; $r,\ \varphi$ jsou polární souřadnice, vypočítejte $\iint_\Omega (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je horní půlkruh kruhu $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$.

$$\iint_\Omega (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^2 (2 + r\cos\varphi - r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r = \int_0^\pi \left(\frac{2r^2}{2} + \frac{r^3}{3}(\cos\varphi - \sin\varphi)\right)\Big|_0^2 =$$
$$\int_0^\pi \left(4 + \frac{8}{3}(\cos\varphi - \sin\varphi)\right)\mathrm{d}\varphi = \left(4\varphi + \frac{8}{3}(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)\Big|_0^\pi = 4\pi + \frac{8}{3}(-1-1) = 4\pi - \frac{16}{3}$$

7) Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte diferenciální rovnici
$y'' - 3y' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Laplaceův obraz rovnice je: $p^2\,Y(p) - p \cdot 0 - 1 - 3pY(p) - 0 - 4Y(p) = \frac{1}{p-2}$, z toho
$Y(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p-2)(p-4)} = \lceil$ rozklad na parciální zlomky$\rfloor = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-4} \;\Rightarrow$
$p - 1 = A\,(p-2)(p-4) + B\,(p+1)(p-4) + C\,(p-2)(p+1)$, dosazením nulových bodů:

$p = -1 \;\Rightarrow\; -2 = 15\,A \;\Rightarrow\; A = -2/15,$
$p = 2 \;\Rightarrow\; 1 = -6\,B \;\Rightarrow\; B = -1/6$
$p = 4 \;\Rightarrow\; 3 = 10\,C \;\Rightarrow\; C = 3/10. \;\Rightarrow$

Řešení vyhovující daným počátečním podmínkám je $y = -\dfrac{2}{15}\,\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{3}{10}\,\mathrm{e}^{4x}.$

8) Vyřešte diferenční rovnici $\Delta y_n - y_n = 3^n$ s počáteční podmínkou $y_o = 0$.
Označíme $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, potom obraz $\mathcal{Z}\{\Delta y_n\} = (z-1)Y(z) - y_o z = (z-1)Y(z)$,
obraz $\mathcal{Z}\{3^n\} = \dfrac{z}{z-3} \;\Rightarrow$ obraz rovnice je $(z-2)Y(z) = \dfrac{z}{z-3} \;\Rightarrow$
$Y(z) = \dfrac{z}{(z-3)(z-2)} = z\,\dfrac{1}{(z-3)(z-2)} = z\left(\dfrac{1}{z-3} - \dfrac{1}{z-2}\right) = \dfrac{z}{z-3} - \dfrac{z}{z-2} \;\Rightarrow$
Řešením dané rovnice je posloupnost $y_n = 3^n - 2^n,$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$

9)I) Primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ je $F(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Potom $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ je roven

a) ∞, *b)* -2, *c)* 2, *d)* 0.

II) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}x$ se rovná

a) $\arccos(x+4)$, b) $\arcsin 4x$, c) $\dfrac{1}{2}\arcsin 2x$, d) $2\arcsin 2x$.

III) Nechť funkce $u(x),\ v(x),\ u'(x),\ v'(x)$ jsou integrovatelné na intervalu I, potom platí

a) $\displaystyle\int u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x = u(x)\,v'(x) - \int u(x)\,v(x)\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x = u'(x)\,v'(x) - \int u(x)\,v(x)\mathrm{d}x'$
c) $\displaystyle\int u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v'(x)\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\mathrm{d}x.$

IV) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ se vypočítá substitucí $t = x^2+1$. Výsledek je

a) $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}$, b) $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}$, c) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}$, d) $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}$.

V) Množina $\Omega = \{[x,y];\ y \ge \frac{1}{2}x - 4 \ \wedge\ y \le -\sqrt{x} \ \wedge\ x \ge 0\}$ je dána zápisem

a) $x \in \langle 0,\, 4\rangle$, $y \in \langle \frac{1}{2}x - 4,\, -\sqrt{x}\rangle$, b) $x \in \langle 0,\, 4\rangle$, $y \in \langle \frac{1}{2}x - 4,\, \sqrt{x}\rangle$, c) $x \in \langle 0,\, 8\rangle$, $y \in \langle \frac{1}{2}x - 4,\, -\sqrt{x}\rangle$, d) $x \in \langle -4,\, 0\rangle$, $y \in \langle -\sqrt{x},\, \frac{1}{2}x - 4\rangle$,

10)I) Množina $\Omega = \{[x,y];\ y \le \frac{\sqrt{3}}{3}x \ \wedge\ x \ge 0 \ \wedge\ x^2+y^2 \le 4\}$ je dána zápisem v polárních souřadnicích
(Nápověda: $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\dfrac{\pi}{6}$)

a) $r \in \langle 0,\, 2\rangle$, $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2},\, \frac{2}{3}\pi\rangle$, b) $r \in \langle 0,\, 4\rangle$, $\varphi \in \langle \frac{\pi}{6},\, \frac{\pi}{2}\rangle$, c) $r \in \langle 0,\, 2\rangle$, $\varphi \in \langle 0,\, \frac{\pi}{6}\rangle$, d) $r \in \langle 0,\, 2\rangle$, $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2},\, \frac{5}{6}\pi\rangle$,

II) Jakobián transformace definované vztahy $x = \varrho\cos t,\ y = \varrho\sin t - 2$ je

a) $\varrho - 2$, b) $t - 2$, c) ϱ, d) t.

III) Jedno z partikulárních řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' - 3y = -6x - 1$ je $y_p =$

a) $2x+1$, b) $2x-3$, c) $3x-1$, d) $2x-1$

IV) Obraz funkce $f(t) = \mathrm{e}^{2t}$ v Laplaceově transformaci je podle definice

a) $\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}p$ b) $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{(2-p)t}\,\mathrm{d}t$ c) $\int\limits_2^\infty \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ d) $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{(p-2)t}\,\mathrm{d}t$.

V) Je dána posloupnost $f_n = 2^n,\ n \in \mathbf{N}_o$. Obraz posloupnosti f_n posunuté o dvě doleva je

a) $\dfrac{4z^2}{z-2}$ b) $\dfrac{z^2}{z-2}$ c) $\dfrac{4}{z-2}$ d) $\dfrac{4z}{z-2}$

9) b), c), d), b), a)
10) c), c), d), b), d).