1) Vypočítejte $\int \left(3\sin(3x-1)+\dfrac{1}{\sqrt[5]{2x+6}}-(x+5)^9\right)\mathrm{d}x$ a určete intervaly, na kterých integrál existuje.

2) Určete intervaly, na kterých integrál $\int \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+3\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ existuje a metodou substituce jej vypočítejte.

3) Vypočítejte $\int\limits_3^\infty \dfrac{x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x$. Použijte rozklad na pariální zlomky.

4) Vypočítejte $\iint\limits_\Omega (2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je dolní půlkruh kruhu $x^2+(y+2)^2\le 4$. Použijte transformaci $x=r\cos\varphi,\ y=-2+r\sin\varphi,\ J=r$.

5) Metodou variace konstanty nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y\prime+\dfrac{y}{x}=x$.

6) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti Ω, ohraničené osou x, osou y, grafem $f(x)=1-\sin x$ a přímkou $x=\pi$.

7) Nalezněte řešení diferenční rovnice: $y_{n+2}-4\,y_{n+1}+3y_n=0$ vyhovující počátečním podmínkám $y_0=1,\ y_1=2$.

Testy: Zaškrtněte správnou odpověď.

I) Obraz funkce $f(t)=t\,\mathrm{e}^t$ v Laplaceově transformaci je

a) $\int\limits_0^\infty (t+p)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ b) $\int\limits_0^t t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ c) $\int\limits_0^\infty t\,\mathrm{e}^{(1-p)t}\,\mathrm{d}p$ d) $\int\limits_0^\infty t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

II) Jedno z partikulárních řešení diferenciální rovnice $y''-4y'-5y=-5x-9$ je $y_p=$

a) $x+1$, b) $5x-3$, c) $4x-5$, d) $-x-1$

III) Jakobián transformace definované vztahy $x=-2+r\cos\varphi,\ y=5+r\sin\varphi$ je

a) $3+r$, b) $r-6$, c) r, d) $(r-2)(r+5)$.

IV) Množina $\Omega=\{[x,y];\ y\ge\sqrt{3}x\ \wedge\ x\ge 0\ \wedge\ 2\le x^2+y^2\le 4\}$ je dána zápisem v polárních souřadnicích
(Nápověda: $\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{3}$)

a) $r\in\langle\sqrt{2},\,2\rangle$, $\varphi\in\left\langle\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{2}{3}\pi\right\rangle$, b) $r\in\langle 2,\,4\rangle$, $\varphi\in\left\langle\dfrac{\pi}{3},\,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, c) $r\in\langle\sqrt{2},\,2\rangle$, $\varphi\in\left\langle 0,\,\dfrac{\pi}{6}\right\rangle$, d) $r\in\langle\sqrt{2},\,2\rangle$, $\varphi\in\left\langle\dfrac{\pi}{3},\,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$,

V) Primitivní funkce k funkci $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ je $F(x)=\ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$. Potom $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ je roven

a) ∞, *b)* $\ln 2$, *c)* $\ln 1/2$, *d)* 0.

Výsledky

1) $-\cos(3x-1)+\frac{5}{8}\sqrt[5]{(2x+6)^4}-\frac{1}{10}(x+5)^{10}+C$, intervaly: $(-\infty,-3)$; $(-3,\infty)$.

2) $\frac{1}{3}\ln(1+3e^x)+C$, intervaly: $\mathbf{R}$

3) $+\infty$

4) $-4\pi-\frac{16}{3}$

5) $y=\frac{C}{x}+\frac{x^2}{3}$

6) $\frac{3}{2}\pi^2-4\pi$

7) $y_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$

Testy: Správné odpovědi jsou: **I d)**, **II a)**, **III c)**, **IV d)**, **V b)**.