1) Vypočítejte $\int \left(3\sin 2x + 5\frac{1}{\sqrt[3]{2x-4}}\right)\,\mathrm{d}x$ a určete intervaly, na kterých integrál existuje.

$$\int \left(3\sin 2x + 5\frac{1}{\sqrt[3]{2x-4}}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\cos 2x + 5\cdot\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x-4)^2} + C.$$

Intervaly: $2x \neq 4 \;\Rightarrow\; (-\infty,\,2),\;(2,\infty)$.

2) Určete intervaly, na kterých integrál $\int \frac{\cos x}{(2+2\sin x)^3}\,\mathrm{d}x$ existuje a metodou substituce jej vypočítejte.

Intervaly: $\sin x \neq -1 \Rightarrow (-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi,\; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi),\; k \in \mathbf{Z}$

$$\int \frac{\cos x}{(2+2\sin x)^3}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = 2+2\sin x \\ \mathrm{d}t = 2\cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4(2+2\sin x)^2} + C$$

3) Určete obsah plochy ohraničené parabolou $x = y^2 - 1$ a přímkou $y = x - 1$.

Průsečíky $A,\ B$ paraboly a přímky: $y^2 - 1 = y + 1 \;\Rightarrow y_1 = -1,\; y_2 = 2,\; x_1 = 0,\; x_2 = 3$, takže $A = [0,\,-1],\; B = [3,\,2]$, viz obrázek dole.

$$S = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y \int_{y^2-1}^{y+1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}[x]_{y^2-1}^{y+1}\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}(y+1-y^2+1)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

4) Vypočítejte $\int_1^2 \frac{6}{\sqrt[4]{2-x}}\,\mathrm{d}x$. $\quad\int_1^2 \frac{6}{\sqrt[4]{2-x}}\,\mathrm{d}x = -6\frac{(2-x)^{3/4}}{3/4}\Big|_1^2 = 8.$

5) Metodou variace konstanty vyřešte diferenciální rovnici $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^3}$ s počáteční podmínkou $y(1) = 1$. Řešení y_h homogenní rovnice:

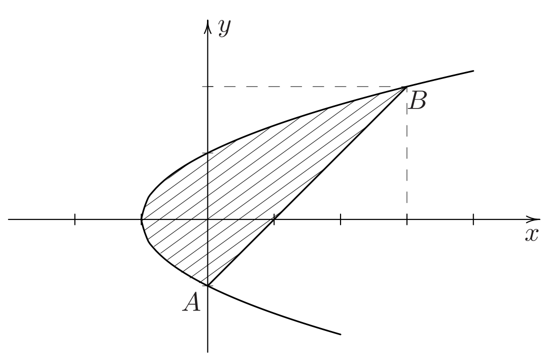
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln|x| + C \;\Rightarrow\; y_h = C\,x,\; C \in \mathbf{R}.$$

Řešení y_p rovnice s pravou stranou (variace konstanty)

$y_p = C(x)\cdot x,\; y_p' = C'(x)\cdot x + C(x)$, dosadíme do rovnice s pravou stranou

$$C'(x)\cdot x + C(x) - \frac{C(x)\cdot x}{x} = \frac{1}{x^3} \;\Rightarrow\; C'(x) = \frac{1}{x^4} \;\Rightarrow\; C(x) = \int\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3x^3} \;\Rightarrow$$
$$y_p = -\frac{1}{3x^2}.$$

Obecné řešení $y_o = y_h + y_p = C\,x - \frac{1}{3x^2}$, řešení vyhovující poč. podmínce: $1 = C - \frac{1}{3} \;\Rightarrow$ $C = \frac{4}{3} \;\Rightarrow\; y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3x^2}$.



6) S použitím transformace do polárních souřadnic vypočítejte $\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je čtvrtina mezikruží $1 \le x^2+y^2 \le 4$ ležící ve 2. kvadrantu.

$\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{1}^{2} \frac{r\cos\varphi}{r}\, r\,\mathrm{d}r = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos\varphi\, \frac{r^2}{2}\Big|_1^2 \mathrm{d}\varphi = \sin\varphi|_{\pi/2}^{\pi} \cdot (4/2 - 1/2) =$ $-3/2$.

7) a) V Laplaceově transformaci nalezněte obraz funkce $f(t) = 2t\,\cos 3t$.

$$F(p) = -2\left(\frac{p}{p^2+9}\right)' = -2\frac{9-p^2}{(p^2+9)^2}.$$

b) Určete funkci $f(t)$, jejímž obrazem je funkce $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+1)}$.

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{p+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1}\right) \;\Rightarrow\; f(t) = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-t} + \sin t + \cos t\right).$$

8) Vyřešte diferenční rovnici $\Delta y_n = 2^n$ s počáteční podmínkou $y_o = 0$.
Označíme $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, potom obraz $\mathcal{Z}\{\Delta y_n\} = (z-1)Y(z) - y_o z = (z-1)Y(z)$,
obraz $\mathcal{Z}\{2^n\} = \dfrac{z}{z-2}$ $\Rightarrow$ obraz rovnice je $(z-1)Y(z) = \dfrac{z}{z-2}$ $\Rightarrow$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = z\,\frac{1}{(z-1)(z-2)} = z\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1} \;\Rightarrow$$

Řešením dané rovnice je posloupnost $y_n = 2^n - 1,$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$

9)I) Primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ je $F(x) = \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$. Potom $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ je roven

a) ∞, *b)* $\ln 2$, *c)* $1 - \ln 2$, *d)* 0.

II) Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, pak určitý integrál $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se rovná

a) $F(a) - F(b)$, *b)* $F(b) - F(a) + C$, *c)* $F(b) - F(a)$, *d)* $f(b) - f(a)$.

III) $\int \sin(2x + \pi/2)\mathrm{d}x$ se rovná

a) $-\dfrac{2}{\pi}\cos(2x+\pi/2)$, *b)* $\cos(2x+\pi/2)$, *c)* $\dfrac{\pi}{2}\cos(2x+\pi/2)$, *d)* $-\dfrac{1}{2}\cos(2x+\pi/2)$.

IV) $\int \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ se vypočítá substitucí $t = \ln x$. Výsledek je

a) $(\ln x)^2$, b) $\dfrac{\ln^2 x}{2}$, c) $\ln\dfrac{1}{x}$, d) $\dfrac{\ln x^2}{2}$.

V) Množina $\Omega = \{[x,y];\ y \ge x+1 \ \wedge\ y \le 1 - x^2\}$ je dána zápisem

a) $x \in \langle -1, 1\rangle$, $y \in \langle x+1, 1-x^2\rangle$,
b) $x \in \langle -1, 0\rangle$, $y \in \langle 1-x^2, x+1\rangle$,
c) $x \in \langle 0, 1\rangle$, $y \in \langle 1-x^2, x+1\rangle$,
d) $x \in \langle -1, 0\rangle$, $y \in \langle x+1, 1-x^2\rangle$,

10)I) Množina $\Omega = \{[x,y];\ y \ge -x \ \wedge\ x \le 0 \ \wedge\ 4 \le x^2+y^2 \le 9\}$ je dána zápisem

a) $r \in \langle -2, 3\rangle$, $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\rangle$,
b) $r \in \langle 2, 3\rangle$, $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\rangle$,
c) $r \in \langle 4, 3\rangle$, $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi\rangle$,
d) $r \in \langle 2, 3\rangle$, $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\rangle$,

II) Jakobián transformace definované vztahy $x = 1 + r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ je

a) $1 + r$, b) $r + r^2$, c) $r - 1$, d) r.

III) Obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' = 0$ je $y =$

a) $C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{4x}$, b) $C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$, c) $C_1 + C_2\mathrm{e}^{4x}$, d) $C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2$

IV) Obraz funkce $f(t) = sint$ v Laplaceově transformaci je

a) $\int\limits_0^\infty \sin p\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}p$ b) $\int\limits_0^\pi \sin t\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ c) $\int\limits_0^\infty \sin t\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ d) $\int\limits_0^\infty \cos t\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

V) Je dána posloupnost $y_n = 3^n,\ n \in \mathbf{N}_o$. Druhá diference $\Delta^2 y_n =$

a) $4 \cdot 3^n$ b) $3^{n+2} - 3^n$ c) $2 \cdot 3^n$ d) $4 \cdot 3^{n-1}$
(Nápověda: $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$)

9) b), c), d), b), d)
10) d), d), c), c), a).