

1) Nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \ln(3x^2 - 2x)$, rovnoběžné s přímkou $p: y = 4x - 7$.

2) Určete, zda následující řady konvergují, nebo divergují. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+1)!}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-2}{5n^2+4n+5}$.

3) Nalezněte globální (absolutní) extrémy funkce $f(x) = 3\sqrt{x^5} - 5\sqrt{x^3}$ na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$.

4) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

5) Soustava $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má partikulární řešení $\mathbf{x}_p = (-3, 4, 2)^T$. Nalezněte obecné řešení soustavy a vektor pravých stran \mathbf{b} . Matice soustavy je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6) Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} + 3\mathbf{X}$ pro neznámou matici \mathbf{X} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}.$$

7) Určete rozměry válce, který je vepsán do koule o poloměru 3 a má největší objem.

- 8) I) Je-li funkce f spojitá v bodě $x = x_o$, pak z toho plyne, že
- a) v bodě $x = x_o$ existuje 1. derivace funkce f ,
 - b) $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$,
 - c) $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = a$, $a \neq f(x_o)$,
 - d) bod x_o je stacionární bod.
- II) Derivace funkce $f(x) = \frac{x}{x+1}$ je rovna
- a) $-\frac{1}{(x+1)^2}$
 - b) $\frac{2x+1}{(x+1)^2}$
 - c) $(x+1)^{-2}$
 - d) $(-1)(x+1)^{-1}$.
- III) Každá polynomická funkce třetího stupně má
- a) aspoň jeden inflexní bod,
 - b) právě dva inflexní body,
 - c) nejvýše jeden inflexní bod,
 - d) právě jeden inflexní bod.
- IV) Součin matic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je definován, právě když
- a) počet sloupců matice \mathbf{A} je roven počtu řádků matice \mathbf{B} ,
 - b) počet řádků matice \mathbf{A} je roven počtu sloupců matice \mathbf{B} ,
 - c) obě matice jsou stejného typu,
 - d) počet řádků matice \mathbf{A} je roven počtu řádků matice \mathbf{B} .
- V) Má-li matice \mathbf{A} vlastní číslo $\lambda = 2$, pak matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A} + 3\mathbf{E}$ má vlastní číslo
- a) $\lambda = -1$,
 - b) $\lambda = 1$,
 - c) $\lambda = 0$,
 - d) $\lambda = 3$.

Výsledky

- 1) Bod dotyku $T = [1, 0]$, tečna $t: y = 4x - 4$. Bod $x = \frac{1}{6}$ není z D_f .
- 2) a) Řada konverguje (limitní podílové kritérium). b) Řada konverguje (Leibnizovo kritérium).
- 3) G_{\max} je v bodě $x = 4$, $f(x) = 56$, g_{\min} v bodě $x = 1$, $f(x) = -2$.
- 4) $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{x}_1 = t(1, -1)$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x}_2 = t(1, 1)$, $t \in \mathbf{R}$.
- 5) Obecné řešení je $\mathbf{x} = (-3, 4, 2)^T + z(-1/2, 3/2, 1)^T$, vektor pravých stran $\mathbf{b} = (-3, -4, -1)^T$.
- 6) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.
- 7) Poloměr podstavy je $r = \sqrt{6}$, výška $v = 2\sqrt{3}$, objem válce $V = 12\pi\sqrt{3}$.
- 8) Správné odpovědi jsou: **I b), II c), III d), IV a), V b).**