1) Vypočítejte první čtyři členy Taylorova polynomu se středem v bodě $x_o = 0$ funkce $f(x) = \sqrt{x+1}$.

   (Nápověda: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_o)\frac{(x-x_o)^k}{k!}$)

2) Určete lokální extrémy funkce $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 5)$.

3) Určete všechny asymptoty (napište jejich rovnice) funkce $f(x) = \sqrt{x^2-4}$. Načrtněte části grafu v blízkosti asymptot.

4) Je dán lineární obal $M = \langle (2,-1,3),\ (4,0,-3),\ (2,5,3)\rangle$. Zjistěte, zda vektor $(1,1,1)$ je prvek lineárního obalu M. Své tvrzení zůvodněte.

5) Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} = \mathbf{B} + 3\mathbf{X}$ pro neznámou matici $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & -13 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}.$$

6) Určete hodnotu čísla $p \in \mathbf{R}$ tak, aby daná soustava pro neznámé $x,\ y,\ z,\ u$ měla jednoparametrické řešení. Kolik je v tom případě dimenze prostoru všech řešení přidružené homogenní soustavy? Své tvrzení zdůvodněte.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & & & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 2 \\ 3x & + & y & + & pz & & & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & + & 2u & = & 2 \end{array}$$

7) Balón stoupá svisle vzhůru nad bodem A rychlostí 4,5 metrů za vteřinu. Bod B je od bodu A vzdálen 9 metrů (oba body jsou ve stejné nadmořské výšce). Jak se mění (jakou rychlostí) vzdálenost balónu od bodu B v okamžiku, kdy je balón 12 metrů nad zemí.

8) I) Funkce $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2},\ x \in \mathbf{R}$ je

a) periodická, b) sudá, c) lichá, d) nic z předešlého.

II) Derivace funkce $f(x) = \tan(x^2)$ je rovna

a) $\dfrac{1}{\cos(x^2)}$ b) $\dfrac{1}{\cos^2(x^2)}$ c) $\dfrac{2x}{\cos(x^2)}$ d) $\dfrac{2x}{\cos^2(x^2)}$.

III) Funkce $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ je v bodě $x = 3$

a) klesající a konvexní, b) klesající a konkávní,

c) rostoucí a konvexní, d) rostoucí a konkávní.

IV) Vektory $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé, jestliže řešení vektorové rovnice $k_1\,\mathbf{u}_1 + k_2\,\mathbf{u}_2 + \ldots + k_n\,\mathbf{u}_n = \mathbf{o}$ pro neznámé $k_1,\ k_2, \ldots,\ k_n$ je

a) pouze triviální,

b) takové, že alespoň jedno k_i je různé od nuly,

c) takové, že všechna $k_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ jsou různá od nuly,

d) takové, že $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$.

V) Dvě matice můžeme sečíst, pokud

a) jsou obě čtvercové,

b) první má stejný počet řádků jako druhá sloupců,

c) jsou stejného typu,

d) první má stejný počet sloupců jako druhá řádků.

Výsledky

1) $T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{16}\,x^3.$

2) Funkce má lokální minimum v bodě $x = -1,\ y = \ln 4$.

3) Šikmá asymptota v $+\infty:\ y = x$, šikmá asymptota v $-\infty:\ y = -x$, viz obr.

4) Vektor $(1,1,1) \in M$, protože vektory LOB jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi v $\mathbf{R}^3$.

5) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 3\,\mathbf{E})^{-1}\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$

6) $p = -2$, dimenze je rovna 1.

7) Vzdálenost roste rychlostí 3,6 metrů za vteřinu.

8) Správné odpovědi jsou: **I c)**, **II d)**, **III b)**, **IV a)**, **V c)**.