1) Určete intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$.

2) Je dána řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Ověřte, že řada konverguje a určete její součet.

3) Nalezněte rovnice všech tečen ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{cotg} 2x,\ x \in (-\pi/2,\ \pi/2) \setminus \{0\}$, rovnoběžných s přímkou $y = -2x + 11$. Určete body dotyku.

4) Je dán lineární prostor všech polynomů stupně nejvýše 2. Rozhodněte, zda skupina polynomů $p_1(x) = 2 + x,\ p_2(x) = 3x + x^2,\ p_3(x) = 1 - x^2,\ p_4(x) = 2 - 3x$ z tohoto prostoru je lineárně (ne)závislá a zda tvoří bázi. Své tvrzení zdůvodněte.

5) Vyřešte soustavu $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$. Jaké je obecné řešení přidružené homogenní soustavy?

6) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

7) Dvě rovnoběžné strany obdélníka se zvětšují rychlostí 2 cm/s a druhé dvě strany se zároveň mění tak, že plocha obdélníka zůstává stejná a to 50 cm^2. Jak se mění obvod tohoto obdélníka, je-li zvětšující se strana rovna a) 5 cm, b) 10 cm.

8) Zaškrtněte správnou odpověď.

I) Funkce f je omezená na svém definičním oboru D_f, jestliže

a) $\exists\, k$ takové, že pro $\forall x \in D_f$ je $f(x) < k$,

b) $\exists\, k > 0$, že pro $\forall x \in D_f$ je $|f(x)| < k$,

c) $\exists\, k > 0$, že pro $\forall x \in D_f$ je $|f(x)| > k$,

d) pro $\forall\, k \in \mathbf{R}$ je $|f(x)| < k$.

II) Derivace funkce $f(x) = \ln \sqrt{x}$ je rovna

a) $\dfrac{1}{2x}$ b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d) $\dfrac{1}{x}$.

III) Funkce f je rostoucí na intervalu I, právě když

a) existují taková $x_1,\ x_2 \in\ I,\ x_1 < x_2$, že $f(x_1) < f(x_2)$,

b) alespoň pro jednu dvojici $x_1,\ x_2 \in\ I$ je $f(x_1) < f(x_2)$,

c) pro každou dvojici $x_1,\ x_2 \in\ I$ je $f(x_1) < f(x_2)$,

d) pro všechna $x_1,\ x_2 \in\ I,\ x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.

IV) Hodnost matice $\mathbf{A}$ typu $n,\ m$ je rovna

a) menšímu z čísel $n,\ m$,

b) většímu z čísel $n,\ m$,

c) počtu sloupců matice $\mathbf{A}$,

d) dimenzi lineárního obalu řádků nebo sloupců matice $\mathbf{A}$.

V) Má-li matice$\mathbf{A}$ vlastní číslo $\lambda = 2$, pak matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^3 - 5\,\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E}$ má vlastní číslo

a) $\lambda = -1$, b) $\lambda = 1$, c) $\lambda = 0$, d) $\lambda = 3$.

Výsledky

1) Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1\rangle$, klesající na $\langle 1, 3)$, $(3, \infty)$ a má lokální maximum v bodě $x = 1$, $f(1) = -1/4$.

2) Řada je geometrická s kvocientem $q = 2/3$ a má součet $s = 6$.

3) Tečny jsou dvě: $t_1 :\ y = -2x - \pi/2,\ T_1[-\pi/4, 0]$, $\quad t_2 :\ y = -2x + \pi/2,\ T_2[\pi/4, 0]$.

4) Skupina polynomů je lineárně závislá (je jich moc), a tedy nemůže tvořit bázi.

5) Obecné řešení nehomogenní soustavy je $\mathbf{x} = (2, 0, 0, 0) + t\,(-1, 3, 11, 0) + s\,(-2, -5, 0, 11)$, obecné řešení homogenní soustavy je $\mathbf{x}_h = t\,(-1, 3, 11, 0) + s\,(-2, -5, 0, 11)$, $t,\ s \in \mathbf{R}$.

6) $\lambda_1 = 5,\ \mathbf{x}_1 = t\,(1, -1),\ \lambda_2 = -3,\ \mathbf{x}_2 = t\,(1, 1),\ t \in \mathbf{R}$.

7) **a)** obvod se zmenšuje rychlostí 4 cm/s, **b)** obvod se zvětšuje rychlostí 2 cm/s.

8) Správné odpovědi jsou: **I b)**, **II a)**, **III d)**, **IV d)**, **V b)**.