1) Vypočítejte první tři nenulové členy Taylorova polynomu se středem v bodě $x_o = 0$ funkce $f(x) = \cos 3x$.

   (Nápověda: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_o)\dfrac{(x-x_o)^k}{k!}$)

2) Zjistěte, kdy je funkce $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 5)$ konkávní a kdy konvexní.

3) Určete tečnu ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{1}{2\,\cos x}$ v bodě $T = [\pi/3, ?]$. Jaký úhel svírá tečna s kladným směrem osy x?

4) Je dán lineární prostor $\mathbf{R}^3$ s operací sčítání $(a,b,c)+(d,e,f) = (a+d, b+e, c+f)$ a násobení reálným číslem $\alpha\cdot(a,b,c) = (\alpha\, a, \alpha\, b, \alpha\, c)$. Zjistěte, zda následující podmnožiny $M \subseteq \mathbf{R}^3$ jsou podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$.

   a) $M = \{(a,b,c);\ a \geq b,\ c \text{ libovolné}\}$,
   b) $M = \{(a,b,1);\ a,\ b \text{ libovolné}\}$,
   c) $M = \{(a,b,c);\ b = c,\ a,\ b \text{ libovolné}\}$,
   d) $M = \{(a,b,c);\ c = 2b - 3a,\ a,\ b \text{ libovolné}\}$,
   e) $M = \{(a,b,c);\ b = a\,c,\ a,\ c \text{ libovolné}\}$.

5) Vypočítejte determinant

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

6) Soustava $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má partikulární řešení $\mathbf{x}_p = (-2,1,0)^T$. Nalezněte obecné řešení soustavy a vektor pravých stran $\mathbf{b}$. Matice soustavy je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

7) Poloměr koule r se mění v čase. Určete hodnotu poloměru r, při níž se rychlost změny poloměru číselně rovná rychlosti změny povrchu této koule.

   (Nápověda: povrch koule je $P = 4\pi\, r^2$.)

8) I) Má-li funkce f v bodě x_o nulovou první derivaci, pak

a) bod x_o je jejím inflexním bodem,

b) má v bodě x_o lokální extrém ,

c) nemá v bodě x_o lokální extrém,

d) může mít v bodě x_o lokální extrém.

II) Derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$ je rovna

a) $\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{1}{3}x^{-2/3}$ b) $\frac{1}{3}\frac{2x+1}{\sqrt[3]{(x^2+x)^2}}$,

c) $-3(x^2 + x)^{-2}\,(2x + 1)$ d) $\frac{1}{3}(2x + 1)^{-2/3}$.

III) Funkce f je spojitá v bodě $x = x_o$, právě když

a) $\lim\limits_{x\to 0} = f(x_o)$, b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(x_o)$,

c) $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = f(x_o)$, d) bod $\mathrm{x_o}$ je stacionární bod.

IV) Součin matic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ je definován, právě když

a) počet sloupců matice **A** je roven počtu řádků matice **B**,

b) počet řádků matice **A** je roven počtu sloupců matice **B**,

c) obě matice jsou stejného typu,

d) počet řádků matice **A** je roven počtu řádků matice **B**.

V) Hodnost matice **A** je rovna

a) počtu jejích řádků,

b) počtu jejích sloupců,

c) počtu jejích lineárně nezávislých řádků nebo sloupců,

d) počtu jejích lineárně závislých řádků nebo sloupců.

Výsledky

1) $T_4(x) = 1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{81\,x^4}{4!}$

2) Funkce je konkávní na intervalech $(-\infty,\ -3\rangle,\ \langle -1,\ \infty)$, konvexní na $\langle -3,\ -1\rangle$.

3) Tečna $y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(3x - \pi)$, bod dotyku $T[\pi/3, 1]$, úhel $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

4) a), b), e) množiny M nejsou podprostory, c), d) množiny M jsou podprostory.

5) det=27

6) Obecné řešení je $\mathbf{x} = (-2, 1, 0)^T + z(-1/2, 3/2, 1)^T$, vektor pravých stran $\mathbf{b} = (-3, -4, -1)^T$.

7) $r = 1/(8\pi)$

8) Správné odpovědi jsou: **I d)**, **II b)**, **III c)**, **IV a)**, **V c)**.