1) Určete všechny asymptoty (napište jejich rovnice) funkce $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, načrtněte části grafu v blízkosti asymptot.

2) Vypočítejte následující limity

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+3})$.

3) Nalezněte globální (absolutní) etrémy funkce $f(x) = \sqrt{x^3} - 6\sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0,\, 4\rangle$.

4) Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{B} + 2\mathbf{X}$ pro neznámou matici $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5) Vyřešte soustavu $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, řešení vyjádřete jako součet partikulárního řešení soustavy s pravou stranou a obecného řešení přidružené homogenní soustavy. Kolik je dimenze lineárního prostoru M_o všech řešení přidružené homogenní soustavy?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

6) Určete dimenzi lineárního prostoru $L = \langle (2,-4,-2),\ (1,2,3),\ (3,-2,1),\ (-1,6,5),\ (4,1,4) \rangle$.

7) Kuželová nádrž je 15 m hluboká a poloměr na okraji je 5 m. Jestliže naléváme vodu rychlostí $2\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, jak rychle roste poloměr hladiny v okamžiku, kdy bylo nalito $8\pi\,\mathrm{m}^3$ vody?

   Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

8) I) Každá polynomická funkce třetího stupně má

a) aspoň jeden inflexní bod,
b) právě dva inflexní body,
c) nejvýše jeden inflexní bod,
d) právě jeden inflexní bod.

II) Derivace funkce $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{3x}}$ je rovna

a) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} - 3x\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x^2}}$ b) $\dfrac{1}{3x\mathrm{e}^{3x-1}}$ c) $(1 - 3x)\,\mathrm{e}^{-3x}$ d) $(1 - x)\,\mathrm{e}^{-3x}$.

III) Zaškrtněte tvrzení, které není pravdivé: je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,\, b\rangle$, potom

a) je na $\langle a,\, b\rangle$ omezená,
b) existuje $c \in \langle a,\, b\rangle$, že $f(c) = 0$,
c) existuje $c \in \langle a,\, b\rangle$, že $f(c) \leq f(x)$ pro všechna $x \in \langle a,\, b\rangle$ (gmin),
d) existuje $c \in \langle a,\, b\rangle$, že $f(c) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \langle a,\, b\rangle$ (gmax).

IV) Je dán lineární prostor L a podprostor $M = \mathrm{LOB}\,(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d})$, kde vektory $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}$ jsou z prostoru L a v žádné dvojici z nich vybrané není jeden vektor násobkem druhého, $\dim(M) = 2$. Potom

a) libovolná dvojice vybraná z vektorů $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}$ tvoří bázi M,
b) vektory $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}$ jsou lineárně nezávislé,
c) je-li $A = \mathrm{LOB}\,(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$, pak $\dim(A) = 3$,
d) je-li $B = \mathrm{LOB}\,(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d})$, pak $\dim(B) = 4$.

V) Jsou dány matice $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, potom rovnost $\det \mathbf{C} = \det \mathbf{A} \cdot \det\mathbf{B}$ platí pouze

a) pro singulární matice $\mathbf{A},\ \mathbf{B}$,
b) pro čtvercové matice $\mathbf{A},\ \mathbf{B}$ stejného typu,
c) pro transponované matice $\mathbf{A},\ \mathbf{B}$
d) když matice $\mathbf{A},\ \mathbf{B}$ komutují.

<u>*Výsledky*</u>

1) Šikmá asymptota $y = x - 1$, svislá $x = -1$, viz obrázek.

2) **a)** $1/2$, **b)** $3/2$.

3) Gmax je v bodě $x = 0$, $f(x) = 0$, gmin v bodě $x = 2$, $f(x) = -4\sqrt{2}$.

4) $\mathbf{X} = \mathbf{B}\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1}$, $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{X} = -\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5) $\mathbf{x} = (2, 3, 1, 0)^T + u\,(1, -1, -1, 1)^T$, $\dim(M_o) = 1$ (řešení homogenní soustavy je vyjádřeno pomocí jedinného vektoru).

6) $\dim(L) = 3$.

7) Poloměr hladiny roste rychlostí $1/6\pi$ m/min.

8) Správné odpovědi jsou: **I d)**, **II c)**, **III b)**, **IV a)**, **V b)**.