1) Určete všechny asymptoty (napište jejich rovnice) funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$, načrtněte části grafu v blízkosti asymptot.

2) Určete lokální extrémy funkce $f(x) = \sin(x^2)$ na intervalu $\langle -\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\,\pi} \rangle$.

3) Určete, zda následující řady konvergují, nebo divergují. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-2}{3n^2-4n+5}$.

4) Určete hodnotu čísla $p \in \mathbf{R}$ tak, aby daná soustava pro neznámé $x,\ y,\ z,\ u$ měla dvouparametrické řešení. Kolik je v tom případě hodnost matice soustavy? Své tvrzení zdůvodněte.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & + & pz & + & u & = & -2 \\ 3x & - & y & + & z & + & pu & = & 10 \\ x & - & 7y & + & 5z & - & 4u & = & 14 \end{array}$$

5) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$.

6) Vyřešte soustavu $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pomocí inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7) Určete rozměry válce, který je vepsán do koule o poloměru R a má největší objem.

8) I) Funkce $f(x) = \ln(x^2+3)$ je v bodě $x = 3$

a) klesající a konvexní, b) klesající a konkávní,
c) rostoucí a konvexní, d) rostoucí a konkávní.

II) Derivace funkce $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ je rovna

a) $-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ b) $\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$ c) $(x+1)^{-2}$ d) $(-1)(x+1)^{-1}$.

III) Derivace funkce f v bodě $x \in D_f$ je

a) $f'(x) = \lim\limits_{x\to h} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to x} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

d) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x)-f(h)}{h}$

IV) Zaškrtněte tvrzení, které není pravdivé: čtvercová matice $\mathbf{A}$ o n řádcích je regulární, právě když

a) existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$,

b) det $\mathbf{A}$=0,

c) řádky $\mathbf{A}$ jsou lineárně nezávislé,

d) dimenze lineárního obalu sloupců $\mathbf{A}$ je n.

V) Frobeniova věta říká, že soustava lineárních algebraických rovnic má řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice. Potom

a) vektor pravých stran je lineární kombinací sloupců matice soustavy,

b) hodnost matice soustavy je $n+1$, kde n je počet řádků matice,

c) vektor pravých stran a sloupce matice soustavy tvoří skupinu lineárně nezávislých vektorů,

d) řádky matice soustavy jsou vždy lineárně závislé.

Výsledky

1) Svislá asymptota $x = -1$, vodorovná $y = 1$, viz obrázek.

2) Lokální minimum v bodech $x = 0,\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\pi}$, lokální maximum v bodě $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

3) a) Řada konverguje (limitní podílové kriterium). b) Řada konverguje (Leibnizovo kriterium).

4) $p = -2,\ h(\mathbf{A}) = 2.$

5) Vlastní čísla a vlastní vektory jsou: $\lambda_1 = 1,\ \mathbf{x}_1 = t\,(1,\,1)^T,\ \lambda_2 = 4,\ \mathbf{x}_2 = t\,(1,\,2)^T,\ t \in \mathbf{R}.$

6) $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}.$

7) Poloměr podstavy je $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,R$, výška $v = \frac{2}{\sqrt{3}}\,R$, objem válce $V = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$.

8) Správné odpovědi jsou: **I d)**, **II c)**, **III c)**, **IV b)**, **V a)**.