1) Rozhodněte, zda posloupnost $\left\{ \dfrac{3n+1}{n^2+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, nebo klesající, nebo ani jedno z toho a zda je ohraničená. Své tvrzení dokažte.

2) Určete intervaly monotónie funkce $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{2x}$. Kolik má daná funkce lokálních extrémů?

3) Nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \ln(2x^2 - x)$, rovnoběžné s přímkou $p:\ y = 3x + 2$.

4) Je dána matice $\mathbf{A}$. Určete prvek $a^{-1}_{14}$ inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5) Jsou dány tři lineárně nezávislé vektory $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$. Zjistěte lineární (ne)závislost vektorů $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}$, je-li $\mathbf{u} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c},\ \mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b},\ \mathbf{w} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

6) Vyřešte maticovou rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$ : $\quad \mathbf{AX} = \mathbf{B} - 2\mathbf{CX}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

7) Výška kužele je 10 cm a zvětšuje se rychlostí 0,3 cm/min. Poloměr podstavy je 9 cm a zmenšuje se rychlostí 0,2 cm/min. Jak rychle se mění objem kužele? Zvětšuje se, nebo zmenšuje?
(*Nápověda: objem kužele je* $V = 1/3\,\pi r^2\, v$, *$r$ je poloměr podstavy, $v$ výška kužele.*)

8) I) Každá polynomická funkce třetího stupně má

a) aspoň dva lokální extrémy, b) právě dva lokální extrémy,
c) nejvýše dva lokální extrémy, d) jenom jeden lokální extrém.

II) Derivace funkce $f(x) = (\sin x)^2$ je rovna

a) $(\cos x)^2$ b) $-2 \sin x \cos(x^2)$ c) $2 \sin x \cos x$ d) $2x \sin x \cos x$.

III) Je-li funkce $f$ spojitá v bodě $x = x_o$, pak z toho plyne, že

a) v bodě $x = x_o$ existuje 1. derivace funkce $f$, b) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$,
c) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = a,\ a \neq f(x_o)$, d) bod $\mathrm{x_o}$ je stacionární bod.

IV) Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, potom matice $\mathbf{A}^2$ je rovna:

a) $\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} a^2 + bc & b^2 + bd \\ c^2 + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} a^2 & bd \\ cd & d^2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{bmatrix}$.

V) Je dán lineární prostor $L$ a jeho báze $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$, potom

a) báze má tři dimenze,
b) každý vektor z $L$ je triviální lineární kombinací vektorů báze $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$,
c) existuje nenulový vektor z $L$, který je triviální lineární kombinací vektorů báze $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$,
d) každý vektor z $L$ je lineární kombinací vektorů báze $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$.

*Výsledky*

**1)** Posloupnost je klesající, shora omezená svým prvním členem $a_1 = 2$, zdola limitou 0.

**2)** Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 0, \infty)$, klesající na intervalu $\langle -1, 0\rangle$, má dva lokální extrémy.

**3)** Bod dotyku $T = [1, 0]$, tečna $t:\ y = 3x - 3$.

**4)** $a_{14}^{-1} = -\dfrac{8}{37}$.

**5)** Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé.

**6)** $\mathbf{X} = -\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}$.

**7)** Objem kužele se zmenšuje rychlostí $3,9\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$.

**8)** Správné odpovědi jsou: **I c)**, **II c)**, **III b)**, **IV a)**, **V d)**