

Ukázka zkuškového testu BBLAD ZS 2013

1) Rozhodněte, zda posloupnost $\left\{ \frac{3n+2}{5n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, nebo klesající, nebo ani jedno z toho a zda je ohraničená. Své tvrzení dokažte.

2) Určete, pro která x je funkce $f(x) = xe^{-x^2}$ konkávní a pro která konvexní.

3) Vypočítejte první čtyři členy Taylorova polynomu se středem v bodě $x = 0$ pro funkci $f(x) = \tan 2x$.

4) Určete hodnotu čísla $p \in \mathbf{R}$ tak, aby daná soustava pro neznámé x, y, z, u měla jednoparametrické řešení. Kolik je v tom případě hodnost matice soustavy? Své tvrzení zdůvodněte.

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & z & - & 2u & = & 1 \\ 2x & + & py & - & 3z & & & = & 2 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & - & 2u & = & 3 \\ 6x & + & 4y & + & pz & - & 4u & = & 3 \end{array}$$

5) Je dán lineární prostor $\mathbf{P}_{\leq 2}$ všech polynomů stupně nejvýše 2. Rozhodněte, zda skupina polynomů $p_1(x) = 2 + x$, $p_2(x) = 3x + x^2$, $p_3(x) = 1 - x^2$, $p_4(x) = 2 - 3x$ z tohoto prostoru je lineárně (ne)závislá. Tvoří polynomy bázi v uvedeném lineárním prostoru? Své tvrzení zdůvodněte.

6) Vypočítejte matici \mathbf{C}^{-1} , je-li $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7) Výška pravidelného čtyřbokého jehlanu je 10 cm a zvětšuje se rychlostí 0,2 cm/min. Hrana podstavy je 9 cm a zmenšuje se rychlostí 0,3 cm/min. Jak rychle se mění objem jehlanu? Zvětšuje se, nebo zmenšuje?

(Nápověda: objem jehlanu je $V = 1/3 a^2 v$, a je hrana podstavy, v výška jehlanu.)

8)

I) Vektory $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 1)$, $(4, -4, -3)$ jsou lineárně závislé, protože

- a) jsou tři,
- b) žádný z nich není násobkem jiného,
- c) první vektor je lineární kombinací druhého a třetího vektoru,
- d) pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů je rovna nulovému vektoru.

II) Derivace funkce $f(x) = \sin(x^2)$ je rovna

- a) $\cos(x^2)$
- b) $-\cos(x^2)$
- c) $2 \sin(x^2)$
- d) $2x \cos(x^2)$.

Ve zkuškovém testu budou následovat ještě další tři příklady podobné př. 8 I) a 8 II)

Výsledky

- 1) Posloupnost je klesající, shora omezená svým prvním členem $a_1 = 5/4$, zdola limitou $3/5$.
- 2) Funkce je konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3/2})$, $(0, \sqrt{3/2})$, konvexní na intervalech $(-\sqrt{3/2}, 0)$, $(\sqrt{3/2}, \infty)$.
- 3) $T_3(x) = 0 + 2x + 0 + \frac{8x^3}{3}$.
- 4) $p = 3$, $h(\mathbf{A}) = 3$.
- 5) $\dim \mathbf{P}_{\leq 2}$ je 3, z toho plyne, že polynomy jsou lineárně závislé a netvoří bázi v $\mathbf{P}_{\leq 2}$.
- 6) Stačí spočítat \mathbf{A}^{-1} , potom $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Vychází $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -9 & -7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.
- 7) Objem se zmenšuje rychlostí $12,6 \text{ cm}^3/\text{min}$.
- 8) **I)** c) je správně, **II)** d) je správně.