Ukázka 2. zápočtového testu BBLAD ZS 2013-14

1) Je dán lineární prostor $\mathbf{R}^3$ s operací sčítání $(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$ a násobení reálným číslem $\alpha \cdot (a, b, c) = (\alpha\, a, \alpha\, b, \alpha\, c)$. Zjistěte, zda následující podmnožiny $M \subseteq \mathbf{R}^3$ jsou podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $M = \{(a, b, c);\ a \leq b\ \wedge\ b \geq c\}$
b) $M = \{(a, b, 0);\ a,\ b \text{ libovolné}\}$
c) $M = \{(a, b, c);\ b = c + 3,\ a,\ c \text{ libovolné}\}$
d) $M = \{(a, b, c);\ c = 2b - 3a,\ a,\ b \text{ libovolné}\}$
e) $M = \{(a, b, c);\ a \cdot b = 0,\ c \text{ libovolné}\}$

2) Určete alespoň jednu bázi lineárního prostoru $M = \langle (2, 1, 5),\ (3, 0, 4),\ (-6, 3, -1),\ (-1, 4, 8) \rangle$.

3) Vypočítejte matici $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4) Vypočítejte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Výsledky

1a), 1c), 1e) Množiny M nejsou podprostory $\mathbf{R}^3$, protože nejsou uzavřené na sčítání popř. násobení reálným číslem,

1b), 1d) Množiny M jsou podprostory $\mathbf{R}^3$.

2) Bázi tvoří libovolná dvojice vektorů, z nichž je lineární obal vytvořen (např. $(2, 1, 5),\ (3, 0, 4)$), protože pouze dva vektory (kterékoli) z uvedených čtyř jsou lineárně nezávislé (zjistí se Gaussovou eliminací).

3)

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -3/2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

4) $\det(\mathbf{A}) = 24$.