

Ukázka zkuškového testu

1) Určete hodnotu čísla $p \in \mathbf{R}$ tak, aby daná soustava pro neznámé x, y, z, u měla dvouparametrické řešení. Kolik je v tom případě hodnost matice soustavy?

$$\begin{aligned}x - y + z - 2u &= 1 \\2x + py - 3z &= 2 \\3x + y - 2z - 2u &= 3 \\3x + 5y - 7z + pu &= 3\end{aligned}$$

2) Je dán lineární prostor všech polynomů stupně nejvýše 2. Rozhodněte, zda skupina polynomů $p_1(x) = 2 + x$, $p_2(x) = 3x + x^2$, $p_3(x) = 6 - 3x - 2x^2$ z tohoto prostoru je lineárně (ne)závislá. Své tvrzení zdůvodněte.

3) Vypočítejte prvek a_{34}^{-1} inverzní matice k matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

4) Určete asymptoty grafu funkce $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$. Načrtněte části grafu v blízkosti asymptot.

5) Zjistěte, zda daná posloupnost $\left\{ \frac{2n-1}{3+n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, vypočítejte její limitu.

6) Nalezněte globální (absolutní) maximum funkce $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2 + 1}$ na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$.

Výsledky

1) $p = 2$, $h(\mathbf{A}) = 2$.

2) Polynomy jsou lineárně závislé, protože kterýkoli z nich je lineární kombinací ostatních. Např. $p_3(x) = -2p_2(x) + 3p_1(x)$

3) $a_{34}^{-1} = -3/22$.

4) Graf má svislou asymptotu $x = 2$, zleva funkční hodnoty klesají, zprava rostou (funkce ovšem klesá); šikmou asymptotu $y = x + 5$, v $+\infty$ se funkce blíží shora, v $-\infty$ zdola, viz obrázek.

5) Posloupnost je rostoucí, zdola omezená svým prvním členem $1/4$, shora omezená limitou rovnou 2.

6) Funkce má globální maximum ve stacionárním bodě $x = 1$, $f(1) = 1$. Další podezřelé body jsou krajní body $-2, 2$ zadaného intervalu, ale $f(-2) = 0.1$, $f(2) = 0.5$, což obě jsou hodnoty menší než 1.

