1) Je dána množina $M \subset \mathbb{R}^3$, $M = \{\mathbf{x} = (a+2b, b, 3a-b),\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$. Dokažte, že M je podprostorem lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$, nalezněte alespoň jednu bázi M a určete dimenzi M.

2) Určete všechny hodnoty parametru p, pro které je hodnost matice $\mathbf{A}$ rovna 3. Kolik je v tom případě dimenze prostoru všech řešení homogenní soustavy $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & p^2+p-7 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ -1 & 1 & -1 & p+4 \end{bmatrix}$$

3) Rozhodněte, zda některý ze zadaných vektorů $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$, pokud ano, určete příslušné vlastní číslo.

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4) Určete globální extrémy funkce $f(x) = (x+2)|x-4|$ na intervalu $\langle -1, 5\rangle$.

5) Zjistěte, zda následující řady konvergují, nebo divergují. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n^3+5n^2-1}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n+5^n}{15^n}$.

6) Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Určete lokální extrémy a inflexní body funkce $f(x)$, pokud existují.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

1) Je třeba dokázat uzavřenost množiny M na operace sčítání a násobení reálným číslem, bázi tvoří např. vektory $(1, 0, 3)$, $(2, 1, -1)$, dimenze M je tudíž 2.

2) Matice $\mathbf{A}$ má hodnost 3 pro všechna reálná $p \neq 3$, dimenze prostoru řešení je: $n - h(\mathbf{A}) = 4 - 3 = 1$, tj. dim = počet neznámých - počet rovnic po eliminaci.

3) Vlastní vektor je $\mathbf{v_2}$, k němu patřící vlastní číslo je $\lambda = 2$.

4) Gmax je v bodě $x = 1$, $f(1) = 9$, gmin je v bodě $x = 4$, $f(4) = 0$.

5a) Řada diverguje (limitní podílové kritérium), **5b)** Řada konverguje (Leibnizovo kritérium).

6) Lokální minimum je v bodě $x = -1+\sqrt{2}$, lokální maximum je v bodě $x = -1-\sqrt{2}$, inflexní body nejsou.

1) Je dána množina $M \subset \mathbb{R}^3$, $M = \{\mathbf{x} = (a + 2b, b, 3a - b),\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$. Dokažte, že M je podprostorem lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$, nalezněte alespoň jednu bázi M a určete dimenzi M.

2) Určete všechny hodnoty parametru p, pro které je hodnost matice $\mathbf{A}$ rovna 3. Kolik je v tom případě dimenze prostoru všech řešení homogenní soustavy $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & p^2 + p - 7 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ -1 & 1 & -1 & p + 4 \end{bmatrix}$$

3) Rozhodněte, zda některý ze zadaných vektorů $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$, pokud ano, určete příslušné vlastní číslo.

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4) Určete globální extrémy funkce $f(x) = (x + 2)|x - 4|$ na intervalu $\langle -1, 5 \rangle$.

5) Zjistěte, zda následující řady konvergují, nebo divergují. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n^3 + 5n^2 - 1}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + 5^n}{15^n}$.

6) Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$. Určete lokální extrémy a inflexní body funkce $f(x)$, pokud existují.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.