

- 1) Ověřte, že dané polynomy $p_1(x) = 2x^2 + 3x$, $p_2(x) = x^2 - x + 2$, $p_3(x) = 4x^2 + x + 3$, tvoří bázi v lineárním prostoru $P_{\leq 2}$ všech polynomů stupně nejvýš 2 a vyjádřete polynom $p(x) = 7x^2 + 13x - 4$ jako lineární kombinaci prvků této báze.
- 2) a) Určete hodnotu parametru p tak, aby matice \mathbf{A} byla singulární.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & p+1 \\ 2 & 7 & p & 6 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

- b) Kolik řešení má soustava $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde \mathbf{A} je matice z příkladu 3a) s parametrem $p = 1$, $\mathbf{b}^T = (1, 1, 1, 1)$. Svě tvrzení zdůvodněte.
- 3) Vyřešte maticovou rovnici pro neznámou matici \mathbf{X} : $2\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{B} = 3\mathbf{X}$, kde

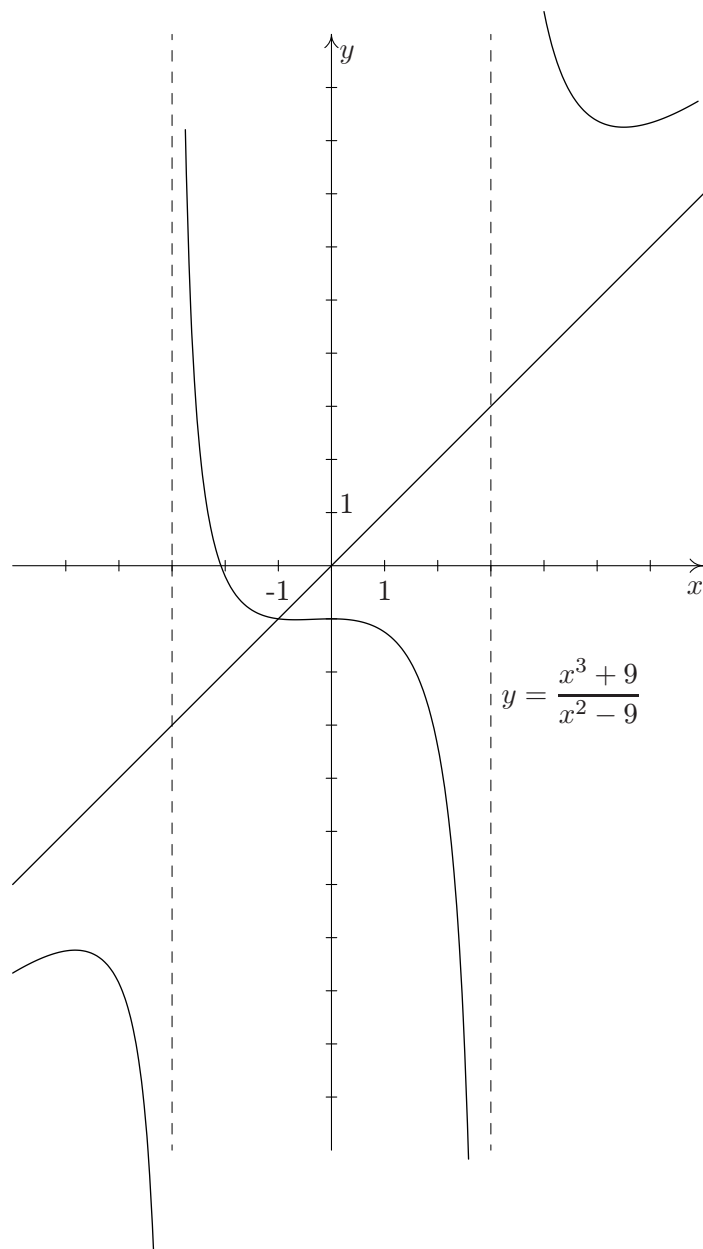
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

- 4) Zjistěte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^3 + 9}{x^2 - 9}$, napište jejich rovnice a načrtněte části grafu funkce v blízkosti asymptot.
- 5) Zjistěte, zda následující řady konvergují, nebo divergují. Svě tvrzení zdůvodněte.
- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 5^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n+5)(n+3)}{2n^3 + 4n}$.
- 6) Rozhodněte, zda existuje tečna v každém bodě grafu funkce $f(x) = x|x-1|$. Nalezněte rovnici tečny ke grafu $f(x) = x|x-1|$ v bodě $x = -2$.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

- 1) Polynomy jsou LNŽ a jsou 3, proto tvoří bázi. $p = 2p_1 - 5p_2 + 2p_3$.
- 2a) Matice \mathbf{A} je singulární pro $p = 2$, jinak je regulární.
- 2b) Soustava $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má jediné řešení, protože matice \mathbf{A} je regulární.
- 3) $\mathbf{X} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 & -17 \\ 42 & -41 \end{bmatrix}$
- 4) Graf má svislé asymptoty $x = -3$, $x = 3$ a šikmou asymptotu $y = x$. Chování funkce v blízkosti asymptot viz obrázek.
- 5a) Řada konverguje (limitní podílové kritérium), 5b) Řada konverguje (Leibnizovo kritérium).
- 6) V bodě $x = 1$ neexistuje derivace funkce, tedy ani tečna. V bodě T[-2,-6] má tečna rovnici $y = 5x + 4$.



- 1) Ověřte, že dané polynomy $p_1(x) = 2x^2 + 3x$, $p_2(x) = x^2 - x + 2$, $p_3(x) = 4x^2 + x + 3$, tvoří bázi v lineárním prostoru $P_{\leq 2}$ všech polynomů stupně nejvýš 2 a vyjádřete polynom $p(x) = 7x^2 + 13x - 4$ jako lineární kombinaci prvků této báze.
- 2) a) Určete hodnotu parametru p tak, aby matice \mathbf{A} byla singulární.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & p+1 \\ 2 & 7 & p & 6 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

- b) Kolik řešení má soustava $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde \mathbf{A} je matice z příkladu 3a) s parametrem $p = 1$, $\mathbf{b}^T = (1, 1, 1, 1)$. Své tvrzení zdůvodněte.
- 3) Vyřešte maticovou rovnici pro neznámou matici \mathbf{X} : $2\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{B} = 3\mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

- 4) Zjistěte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^3 + 9}{x^2 - 9}$, napište jejich rovnice a načrtněte části grafu funkce v blízkosti asymptot.
- 5) Zjistěte, zda následující řady konvergují, nebo divergují. Své tvrzení zdůvodněte.
- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 5^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n+5)(n+3)}{2n^3 + 4n}$.
- 6) Rozhodněte, zda existuje tečna v každém bodě grafu funkce $f(x) = x|x-1|$. Nalezněte rovnici tečny ke grafu $f(x) = x|x-1|$ v bodě $x = -2$.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.